תרגיל 4 – אלגברה מופשטת

1. מצאו את קבוצה המנה G/H של החבורות G לגבי תת החבורות H.

1.1 $G=Z$, $H=5Z$.
1.2 $G=(R^2,+)$, $H=\{0\}\times R$.
1.3 $G=(R^2,+)$, $H=\{(t,4t)\mid t\in R\}$.
1.4 $G=U_{30}$, $H=<11>$.
1.5 $G=(C^*,\cdot)$, $H=\{z\in C \mid \|z\|=1\}$ (כאשר, $C^*=C\setminus\{0\}$).

2. הוכיחו את הטענות הבאות.

2.1 תהי G חבורה, $H,K\le G$ תתי חבורות מסדר m,n בהתאמה כך ש $(m,n)=1$.
אזי $H\cap K=\{e\}$.
2.2 אם G חבורה אבלית ו $a,b\in G$ איברים מסדר m,n בהתאמה כך ש $(m,n)=1$,
אזי $o(ab)=mn$.
2.3 יהיו m,n מספרים טבעיים. אזי, $Z_m\times Z_n\cong Z_{mn}$ אם ורק אם $(m,n)=1$.

3. ענו על הסעיפים הבאים.

3.1 תהי G חבורה כך ש $|G|<60$, קיים $a\in G$ מסדר 5 ו $S_3\le G$. מצאו את הסדר
של G.
3.2 תהי G חבורה לא אבלית מסדר 2^t עבור $t\in N$ כלשהו. הוכיחו כי קיימת ב- G
תת חבורה ציקלית מסדר 4.

4. ענו על הסעיפים הבאים:

4.1 חשבו $197^{81}\bmod 34$.
4.2 מצאו את שתי הספרות האחרונות של $20087853^{199}+876$.

5. הוכיחו את המסקנה הבאה ממשפט לגרנז': תהי G חבורה סופית, ויהיו $K\le H\le G$
ת"ח. אזי $[G:K]=[G:H][H:K]$.

<u>תרגיל אתגר</u>: הוכיחו את אותה תוצאה כאשר מניחים רק ש- K תת חבורה
מאינדקס סופי ב- G. כלומר, מבלי להניח ש- G סופית, ומבלי להניח סופיות של
H. שימו לב שבמקרה זה, זו אינה מסקנה ממשפט לגרנז', אלא הכללה שלו.

בהצלחה! ☺