תרגיל בית 6

שאלה 1

מצא פתרון של כל אחת מהמשוואות הבאות בעזרת טור חזקות ב-x (רשום את נוסחת הנסיגה ואת ארבעה האיברים הראשונים השונים מ-0):

(א) $y''+(x-1)y'+y=0$, (ב) $y''-x^2y'+y=0$,

(ג) $y''-xy'+4y=0$, (ד) $y''-x^2y'-xy=0$.

פתרון שאלה 1

(א) $y''+(x-1)y'+y=0$,

נקודה $x_0=0$ היא נקודה רגולרית של המשוואה לכן ניתן למצוא את הפתרון בעזרת טור חזקות $\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$ אשר מתכנס עבור כל x ממשי. כאן $p(x)=x-1$ ו-$q(x)=1$ הם פולינומים.

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k\ ,\ y'=\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^{k-1}\ ,\ y''=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}\ ,$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}+(x-1)\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^{k-1}+\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=0\ ,$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}+\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^{k}-\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^{k-1}+\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=0\ ,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^{k}+\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^{k}-\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}x^{k}+\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=0\ ,$$

$$k=0:\qquad 2c_2-c_1+c_0=0\ ,$$

$$k\ge 1:\qquad (k+2)(k+1)c_{k+2}-(k+1)c_{k+1}+(k+1)c_k=0\ ,$$

נוסחת הנסיגה: $c_{k+2}=\dfrac{c_{k+1}-c_k}{k+2},k\ge 0$, $y=c_0+c_1x+\dfrac{1}{2}(c_1-c_0)x^2-\dfrac{1}{6}(c_1+c_0)x^3+\ldots$ או

$y=C_1y_1+C_2y_2$ כאשר $y_1=1-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{6}x^3+\ldots$ (כאן בחרנו $c_0=1,c_1=0$) ו-

$y_2=x+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{6}x^3+\ldots$ (כאן $c_0=0,c_1=1$).

(ב) $y''-x^2y'+y=0$,

נקודה $x_0=0$ היא נקודה רגולרית של המשוואה לכן ניתן למצוא את הפתרון בעזרת טור חזקות $\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$ אשר מתכנס עבור כל x ממשי. כאן $p(x)=-x^2$ ו-$q(x)=1$ הם פולינומים.

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k\ ,\ y'=\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^{k-1}\ ,\ y''=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}\ ,$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}-x^2\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^{k-1}+\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=0\ ,$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}-\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^{k+1}+\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=0\ ,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^{k}-\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)c_{k-1}x^{k}+\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=0\ ,$$

$$k=0:\qquad 2c_2+c_0=0\ ,$$

$$k=1:\qquad 6c_3+c_1=0\ ,$$

$$k\ge 2:\qquad (k+2)(k+1)c_{k+2}-(k-1)c_{k-1}+c_k=0\ ,$$

נוסחת הנסיגה: $c_{k+2}=\frac{(k-1)c_{k-1}-c_k}{(k+1)(k+2)}, k\ge 2$, $c_2=-\frac{1}{2}c_0$, $c_3=-\frac{1}{6}c_1$,
$y=c_0+c_1x-\frac{1}{2}c_0x^2-\frac{1}{6}c_1x^3+\frac{1}{24}(6c_1+c_0)x^4+\ldots$ או $y=C_1y_1+C_2y_2$ כאשר
$y_1=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\ldots$ (כאן בחרנו $c_0=1,c_1=0$) ו- $y_2=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^4+\ldots$ (כאן $c_0=0,c_1=1$).

(ג) $y''-xy'+4y=0$,
נקודה $x_0=0$ היא נקודה רגולרית של המשוואה לכן ניתן למצוא את הפתרון בעזרת טור חזקות $\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$ אשר מתכנס עבור כל x ממשי. כאן $p(x)=-x$ ו- $q(x)=4$ הם פולינומים.

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k\ ,\ y'=\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^{k-1}\ ,\ y''=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}\ ,$$
$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}-x\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^{k-1}+4\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=0\ ,$$
$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}-\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^{k}+4\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=0\ ,$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^{k}-\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^{k}+4\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=0\ ,$$
$$k=0:\qquad 2c_2+4c_0=0\ ,$$
$$k\ge 1:\qquad (k+2)(k+1)c_{k+2}-(k-4)c_k=0\ ,$$

נוסחת הנסיגה: $c_{k+2}=\frac{(k-4)c_k}{(k+1)(k+2)}, k\ge 0$, $y=c_0+c_1x-2c_0x^2-\frac{1}{2}c_1x^3+\frac{1}{3}c_0x^4+\ldots$ או
$y=C_1y_1+C_2y_2$ כאשר $y_1=1-2x^2+\frac{1}{3}x^4$ (כאן בחרנו $c_0=1,c_1=0$) ו- $y_2=x-\frac{1}{2}x^3+\ldots$ (כאן $c_0=0,c_1=1$).

(ד) $y''-x^2y'-xy=0$,
נקודה $x_0=0$ היא נקודה רגולרית של המשוואה לכן ניתן למצוא את הפתרון בעזרת טור חזקות $\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$ אשר מתכנס עבור כל x ממשי. כאן $p(x)=-x^2$ ו- $q(x)=-x$ הם פולינומים.

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k\ ,\ y'=\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^{k-1}\ ,\ y''=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}\ ,$$
$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}-x^2\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^{k-1}+x\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=0\ ,$$
$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}-\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^{k+1}-\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+1}=0\ ,$$
$$\sum_{k=-1}^{\infty}(k+3)(k+2)c_{k+3}x^{k+1}-\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^{k+1}-\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+1}=0\ ,$$
$$k=-1:\qquad 2c_2=0\ ,$$
$$k=0:\qquad 6c_3-c_0=0\ ,$$
$$k\ge 1:\qquad (k+3)(k+2)c_{k+3}-(k+1)c_k=0\ ,$$

נוסחת הנסיגה: $k \ge 1$, $c_{k+3} = \dfrac{(k+1)c_k}{(k+3)(k+2)}$, $c_2 = 0$, $c_3 = -\dfrac{1}{6}c_0$,

$y = c_0 + c_1 x + \dfrac{1}{6}c_0 x^3 + \dfrac{1}{6}c_1 x^4 + \dfrac{1}{45}c_0 x^6 + \ldots$ או $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ כאשר $y_1 = 1 + \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{45}x^6 + \ldots$

(כאן בחרנו $c_0 = 1, c_1 = 0$) ו- $y = x + \dfrac{1}{6}x^4 + \ldots$ (כאן $c_0 = 0, c_1 = 1$).

שאלה 2

מצא פתרון של כל אחת מהמשוואות הבאות בעזרת טור חזקות ב-$(x - x_0)$ (רשום את נוסחת הנסיגה ואת ארבעה האיברים הראשונים השונים מ-0):

(א) $xy'' + y' + xy = 0, x_0 = 1$, (ב) $2y'' + (x+1)y' + 3y = 0$, $x_0 = 2$

פתרון שאלה 2

(א) $xy'' + y' + xy = 0, x_0 = 1$,

נסמן את $t = x - 1$ אז $x = t + 1$ והמשוואה נרשמת בצורה $(t+1)y'' + y' + (t+1)y = 0$ כאשר y הוא הפתרון כפונקציה של t. נקודה $t_0 = 0$ היא נקודה רגולרית כי $p(t) = \dfrac{1}{1+t}, q(t) = 1$ מפותחות לטורי חזקות סביב 0 ורדיוס ההתכנסות של $p(t) = \dfrac{1}{1+t}, q(t) = 1$ הינו 1. נחפש את הפתרון בצורה $\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$.

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \,,\ y' = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k t^{k-1} \,,\ y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k t^{k-2} \,,$$

$$(t+1)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k t^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} k c_k t^{k-1} + (t+1)\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = 0 \,,$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k t^{k-1} + \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k t^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} k c_k t^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = 0 \,,$$

$$\sum_{k=3}^{\infty} (k-1)(k-2) c_{k-1} t^{k-2} + \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k t^{k-2} + \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) c_{k-1} t^{k-2} + \sum_{k=3}^{\infty} c_{k-3} t^{k-2} + \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2} t^{k-2} = 0 \,,$$

$$k = 2: \qquad 2c_2 + c_1 + c_0 = 0 \,,$$

$$k \ge 3: \qquad (k-1)^2 c_{k-1} + k(k-1) c_k + c_{k-2} + c_{k-3} = 0 \,,$$

נוסחת הנסיגה $c_k = -\dfrac{k}{k-1}c_{k-1} - \dfrac{1}{k(k-1)}c_{k-2} - \dfrac{1}{k(k-1)}c_{k-3}, k \ge 3$ ו- $c_2 = -\dfrac{c_0 + c_1}{2}$,

$y = c_0 + c_1(x-1) - \dfrac{c_0 + c_1}{2}(x-1)^2 + \dfrac{c_0 + c_1}{6}(x-1)^3 + \ldots$ או $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ כאשר

$y_1 = 1 - \dfrac{1}{2}(x-1)^2 + \dfrac{1}{6}(x-1)^3 - \dfrac{1}{12}(x-1)^4 + \ldots$ (כאן בחרנו $c_0 = 1, c_1 = 0$),

$y_2 = (x-1) - \dfrac{1}{2}(x-1)^2 + \dfrac{1}{6}(x-1)^3 - \dfrac{1}{6}(x-1)^4 + \ldots$ (כאן $c_0 = 0, c_1 = 1$).

ב) $2y''+\left(x+1\right)y'+3y=0, x_0=2$,

נסמן את $t=x-2$ אז $x=t+2$ והמשוואה נרשמת בצורה $2y''+\left(t+3\right)y'+3y=0$ כאשר y הוא הפתרון כפונקציה של t. נקודה $t_0=0$ היא נקודה רגולרית כי $p(t)=\frac{t+3}{2}, q(t)=\frac{3}{2}$ הם פולינומים.

נחפש את הפתרון בצורה $\sum_{k=0}^{\infty}c_k t^k$.

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_k t^k\ ,\ y'=\sum_{k=1}^{\infty}kc_k t^{k-1}\ ,\ y''=\sum_{k=2}^{\infty}k\left(k-1\right)c_k t^{k-2}\ ,$$

$$2\sum_{k=2}^{\infty}k\left(k-1\right)c_k t^{k-2}+\left(t+3\right)\sum_{k=1}^{\infty}kc_k t^{k-1}+3\sum_{k=0}^{\infty}c_k t^k=0\ ,$$

$$2\sum_{k=2}^{\infty}k\left(k-1\right)c_k t^{k-2}+\sum_{k=1}^{\infty}kc_k t^{k}+3\sum_{k=0}^{\infty}kc_k t^{k-1}+3\sum_{k=0}^{\infty}c_k t^k=0\ ,$$

$$2\sum_{k=2}^{\infty}k\left(k-1\right)c_k t^{k-2}+\sum_{k=3}^{\infty}\left(k-2\right)c_{k-2}t^{k-2}+3\sum_{k=2}^{\infty}\left(k-1\right)c_{k-1}t^{k-2}+3\sum_{k=2}^{\infty}c_{k-2}t^{k-2}=0\ ,$$

$$k=2:\qquad 4c_2+3c_1+3c_0=0\ ,$$

$$k\geq 3:\qquad 2k\left(k-1\right)c_k+3\left(k-1\right)c_{k-1}+\left(k+1\right)c_{k-2}=0\ ,$$

נוסחת הנסיגה $c_k=-\frac{3}{2k}c_{k-1}-\frac{k+1}{2k\left(k-1\right)}c_{k-2}, k\geq 3$ ו- $c_2=-\frac{3c_1+3c_0}{4}$,

$y(x)=c_0+c_1\left(x-2\right)-\frac{3c_1+3c_0}{4}\left(x-2\right)^2+\left(\frac{3c_0}{8}+\frac{c_1}{24}\right)\left(x-2\right)^3+\ldots$ או $y=C_1y_1+C_2y_2$ כאשר

$y_1(x)=1-\frac{3}{4}\left(x-2\right)^2+\frac{3}{8}\left(x-2\right)^3+\ldots$ (כאן בחרנו $c_0=1, c_1=0$) ו-

$y_2(x)=\left(x-2\right)-\frac{3}{4}\left(x-2\right)^2+\frac{1}{24}\left(x-2\right)^3+\ldots$ (כאן $c_0=0, c_1=1$).