תורת המשחקים – שיעור 4

משחקים אסטרטגיים "רציפים" ושיווי משקל נאש

משחק המשקיעים

- זהו ניסוי ב crowd funding (מיזם הממומן ע"י הרבה השקעות קטנות).
- השחקנים: אתם.
- אסורה תקשורת בין השחקנים!
- אסטרטגיות: להשקיע 0 ש"ח או להשקיע 10 ש"ח.
- תשלומים:
  - מי שמשקיע 0 ש"ח מקבל 0 ש"ח.
  - אם יותר מ 90% משקיעים, אזי מי שהשקיע 10 ש"ח יקבל רווח נקי של 5 ש"ח.
  - אם פחות מ 90% משקיעים, אזי מי שהשקיע 10 ש"ח מאבד את כל השקעתו (כלומר הפסד של 10 ש"ח).

ניתוח המשחק

- מהן נקודות שיווי משקל נאש?
- תשובה: יש שתי נקודות שיווי משקל נאש – **כולם משקיעים** או **כולם לא משקיעים**.
- הסבירו מדוע אלה נקודות שיווי משקל, ומדוע אף וקטור אסטרטגיות אחר אינו נקודת שיווי משקל.

- נשחק שוב את המשחק...
- יש "נטייה" למשחקים להתכנס לנקודות שיווי משקל נאש.

האם משחק המשקיעים קורה במציאות?

- BANK RUN
  - אם המשקיעים מאבדים אמון בבנק, כולם באים למשוך את הכסף שלהם בבת אחת והבנק קורס.
  - אם כולם משקיעים אז הבנק רווחי ויכול לתת ריביות גבוהות יותר על תכניות חסכון.
  - מה ההבדל בין דילמת האסיר למשחק המשקיעים?
  - It's a wonderful life http://www.youtube.com/watch?v=qu2uJWSZkck
  - אנחנו רואים שבמשחק שיש בו מספר נקודות שיווי משקל יש חשיבות לתקשורת בין השחקנים.
  - יש מקום לדבר על ***מנהיגות*** – אדם אחד מסוגל לשכנע קבוצה גדולה של שחקנים לבחור בנקודת שיווי משקל מסויימת.

חזרה על ההגדרות משיעור 3

- הגדרנו **נקודת שיווי משקל נאש** כוקטור אסטרטגיות $x = (x_1, \dots, x_n)$ המקיים שאסטרטגיה x_i היא **התגובה המיטבית** לוקטור x_{-i} לכל $1 \le i \le n$.
- אמרנו שהאסטרטגיה $y_i \in S_i$ היא ***התגובה המיטבית*** של שחקן i כנגד x_{-i} אם לכל אסטרטגיה אחרת $z_i \in S_i$ מתקיים

$$u_i(y_i, x_{-i}) \ge u_i(z_i, x_{-i})$$

תגובה מיטבית – אפיון נוסף + סימון

- במילים אחרות $y_i \in S_i$ היא ***תגובה מיטבית*** של שחקן i כנגד x_{-i} אם ורק אם

$$u_i(y_i, x_{-i}) = \underset{z_i \in S_i}{Max}\, u_i(z_i, x_{-i})$$

- ראינו בשיעור הקודם שיכולות להיות מספר תגובות מיטביות עבור x_{-i} נתון (לדוגמה: אם $u_i(z_i, x_{-i}) = 0$ לכל $z_i \in S_i$).
- נסמן $BR_i(x_{-i}) = y_i$.
  - הסימון BR הוא עבור best response, תגובה מיטבית.
- הערה חשובה: באופן כללי BR_i אינה פונקציה (כיוון שהיא יכולה לקבל מספר ערכים).

מדוע נקודת שיווי משקל נאש טובה?

- אין חרטות – אם כל השחקנים בחרו באסטרטגיות המרכיבות נקודת שיווי משקל נאש, אף אחד מהשחקנים לא ייתחרט על בחירת האסטרטגיה שלו, כי אף אסטרטגיה אחרת לא היתה משיגה תוצאה טובה יותר עבורו.

- "נבואה שמגשימה את עצמה" – אם כל אחד מהשחקנים "מאמין" שכל השחקנים האחרים ייבחרו באסטרטגיות של נקודת שיווי המשקל, סביר שגם הוא ייבחר באסטרטגיה המתאימה (*צריך להזהר במסקנה זו, מדוע?*).

משחק השותפות
הגדרת המשחק

- שתי שותפות מקימות סטרט-אפ טכנולוגי בהסכמה שהן מתחלקות שווה בשווה ברווחים.
- כל שותפה מחליטה על רמת המאמץ שלה בעבודה (רמת המאמץ תלויה לדוגמה במספר שעות העבודה השבועיות).
- השחקניות: P_1, P_2.
- האסטרטגיות: ננרמל את רמת המאמץ למספר ממשי בין 0 ל 4, כלומר $s_i \in [0,4]$. נשים לב שבמשחק זה יש אינסוף אסטרטגיות!
- תוצאות: הרווח החודשי של החברה (באלפי שקלים) הוא $\mathrm{P}(\mathrm{s}_1, \mathrm{s}_2) = 4(s_1 + s_2 + bs_1s_2)$, כאשר $0 \le b \le \frac{1}{4}$ הוא קבוע המייצג את ה"סינרגיה" של עבודתן המשותפת של השותפות.

משחק השותפות
הגדרת המשחק - המשך

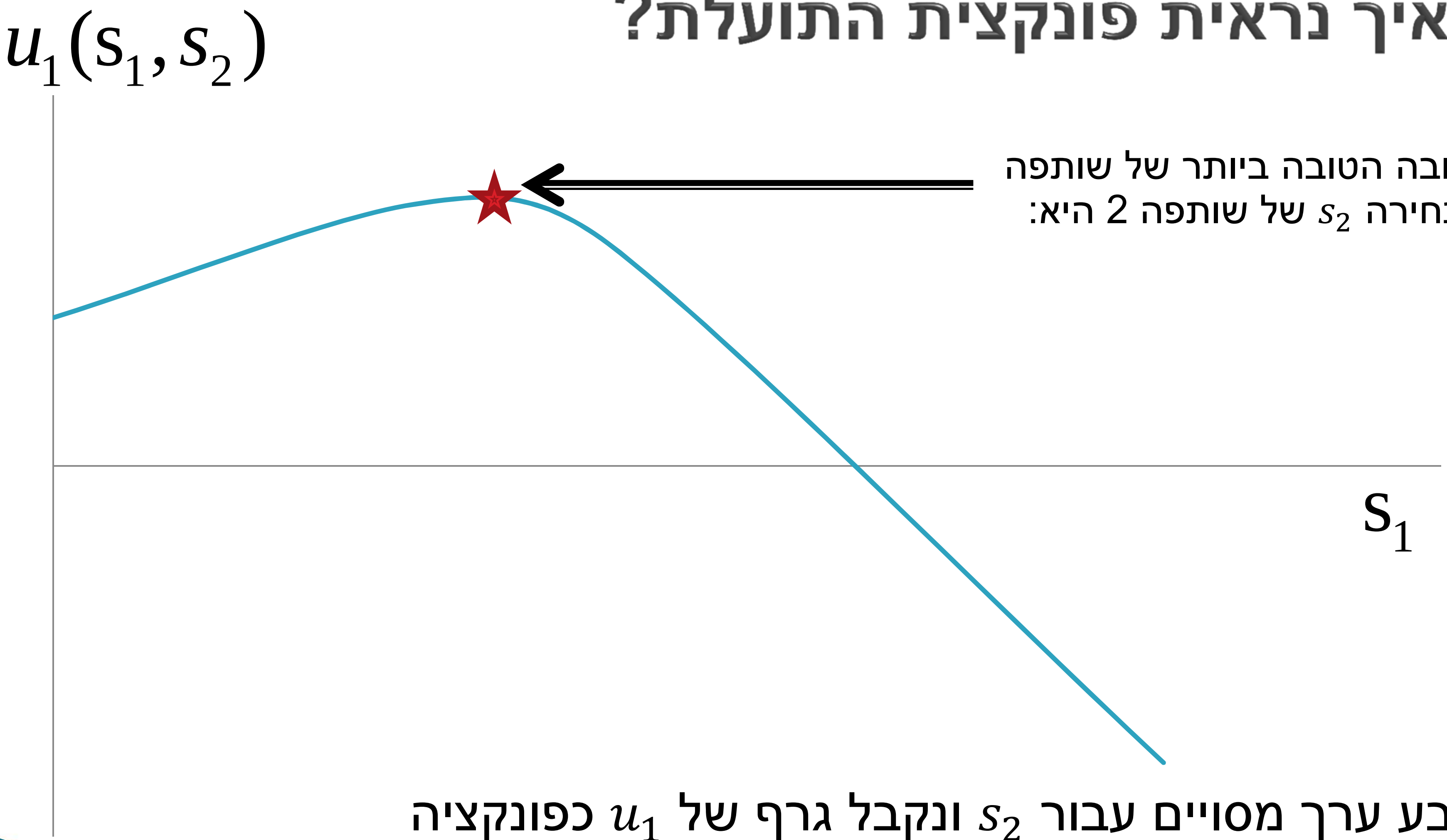
- פונקצית התועלת של כל אחת מהשותפות צריכה לשקף את העובדה שרמת מאמץ גבוהה עולה במשאבים אחרים (זמן עם המשפחה, בריאות וכו').

$$u_i(s_1,s_2)=\frac{1}{2}P(s_1,s_2)-s_i^{\,2}$$

$$=2(s_1+s_2+bs_1s_2)-s_i^{\,2}$$

משחק השותפות

איך נראית פונקצית התועלת?



התגובה הטובה ביותר של שותפה 1 לבחירה s_2 של שותפה 2 היא:

נקבע ערך מסויים עבור s_2 ונקבל גרף של u_1 כפונקציה של s_1.

משחק השותפות
חישוב תגובה מיטבית

$$BR_1(s_2) = \underset{s_1 \in [0,4]}{Max}\left[2(s_1 + s_2 + bs_1 s_2) - s_1^{\ 2}\right]$$

- ע"מ למצוא מקסימום של פונקציה, ניתן לחשב נקודות קיצון בעזרת אינפי (למצוא התאפסות נגזרות ולבדוק את נקודות השפה).
- נשווה את הנגזרת לאפס:

$$\frac{\partial u_1}{\partial s_1}(s_1, s_2) = 2 + 2bs_2 - 2s_1 = 0$$

- קיבלנו (כיוון שהנגזרת השנייה שווה ל 2−) שמתקיים:

$$BR_1(s_2) = 1 + bs_2$$

- מדוע לא צריך לבדוק נק' שפה?

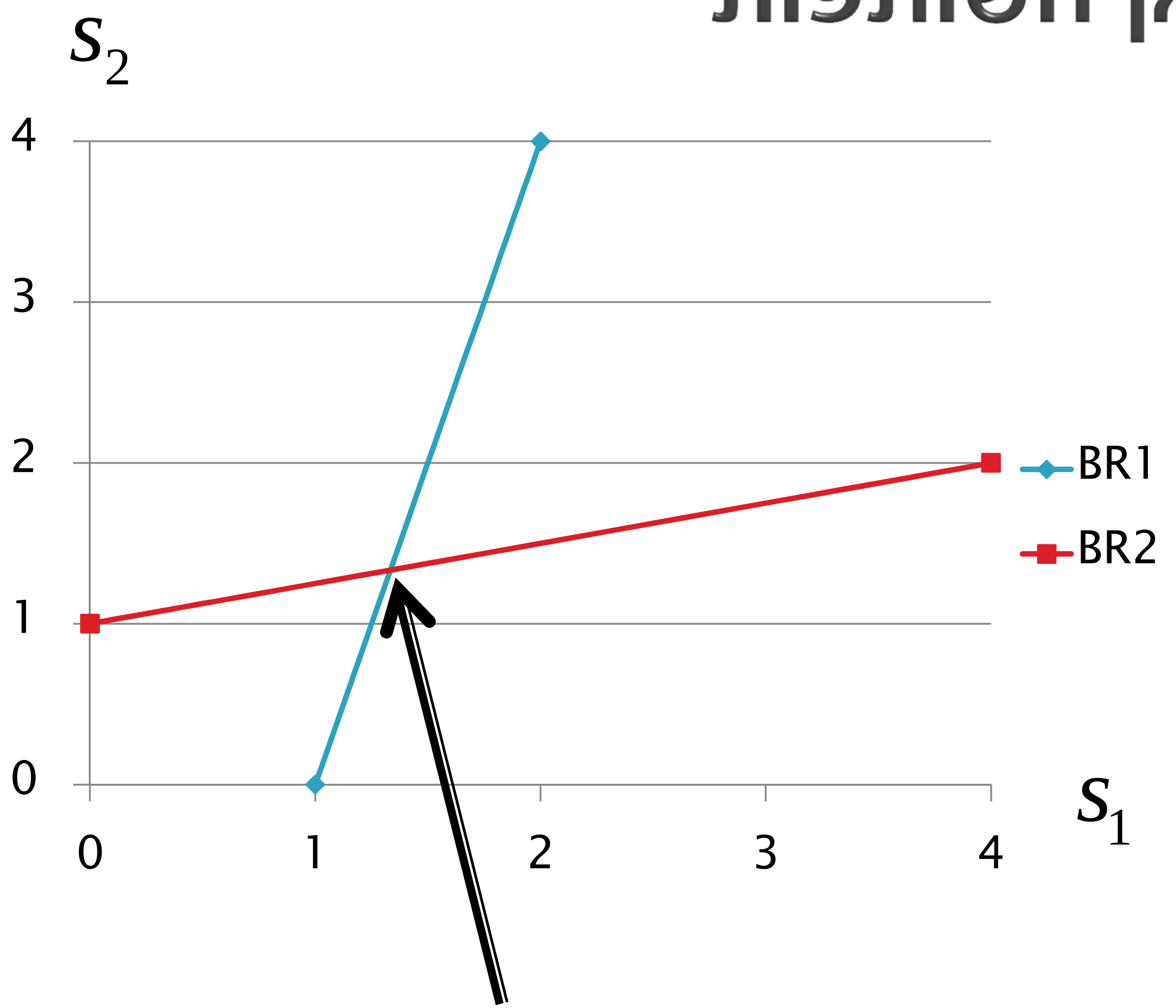
משחק השותפות
חישוב תגובה מיטבית - המשך

- אם כך קיבלנו ש

$$BR_1(s_2) = 1 + bs_2$$
$$BR_2(s_1) = 1 + bs_1$$

- לדוגמה עבור $b = \frac{1}{4}$ נקבל:

משחק השותפות



נקודת שיווי משקל נאש

משחק השותפות

מציאת נקודת שיווי משקל נאש

- נקודת שיווי המשקל היחידה במשחק היא בנקודת החיתוך של שני הגרפים $BR_1(s_2), BR_2(s_1)$.
- ע"מ למצוא את נקודת החיתוך יש לפתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} s_1 = 1 + bs_2 \\ s_2 = 1 + bs_1 \end{cases}$$

- לאחר חישוב נקבל

$$s_1 = s_2 = \frac{1}{1-b}$$

משחק השותפות
מציאת נקודת שיווי משקל נאש

- כלומר וקטור האסטרטגיות

$$\left(\frac{1}{1-b},\frac{1}{1-b}\right)$$

הוא נקודת שיווי משקל נאש.

- לדוגמה עבור $b=\frac{1}{4}$ נקבל ששיווי משקל נאש הוא

$$\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$$

משחק השותפות

האם נקודת נאש היא "טובה"?

- נחשב עבור $b = \frac{1}{4}$:
- הרווח בש"ח עבור כל שותפה בנקודת נאש הוא בערך 6222 ש"ח, כאשר התועלת של כל השותפה היא $\frac{40}{9}$.
- אם כל שותפה עובדת ברמת מאמץ מקסימלית 4, אזי הרווח של כל שותפה הוא 24,000 ש"ח, והתועלת של כל שותפה היא 8.
- אם כך שיווי המשקל במשחק זה לא מביא לתוצאה טובה עבור השותפות.

משחק השותפות

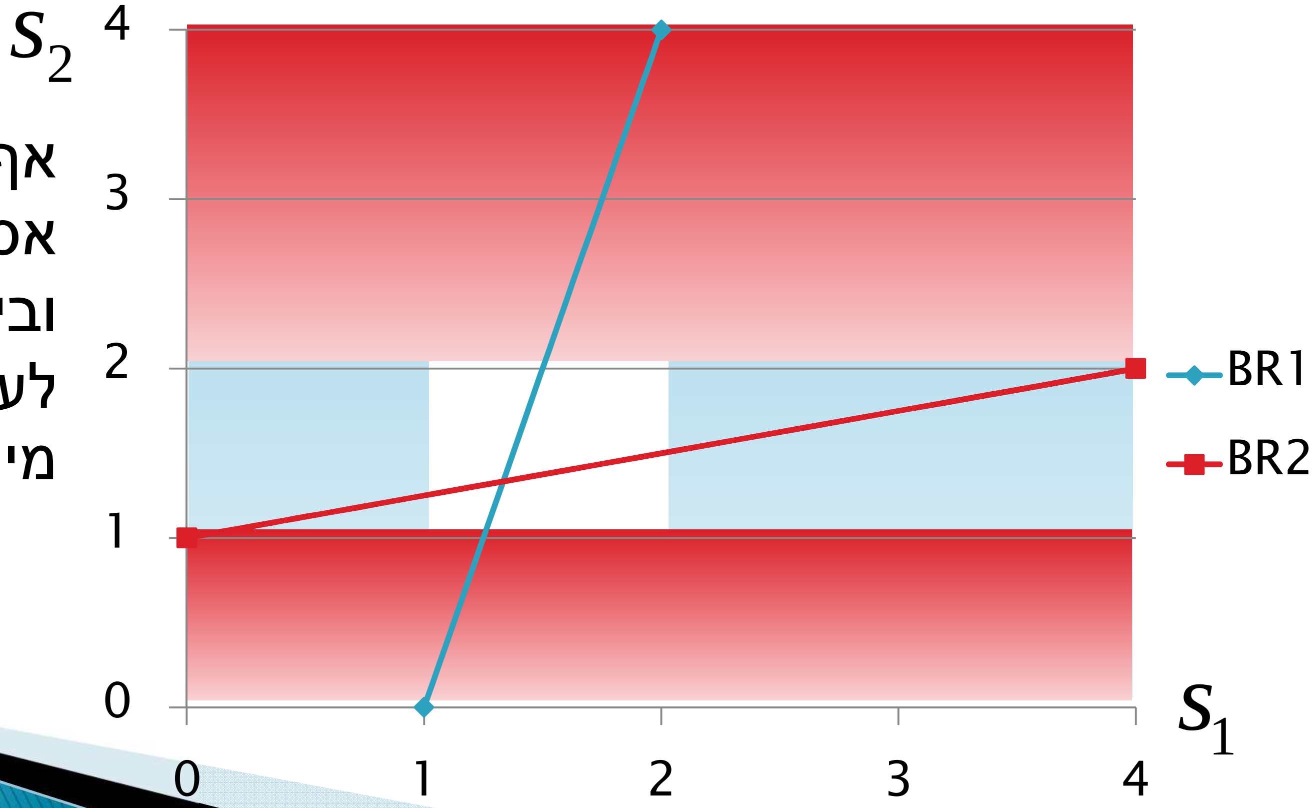
מדוע נקודת נאש אינה "טובה"?

- כל שותפה היא אנוכית, ודואגת רק לתועלת שלה, ולא לרווח הכללי של החברה (או לתועלת שותפתה).
- לדוגמה: כאשר שותפה 2 עובדת במאמץ מירבי של 4, משתלם לשותפה 1 לעבוד במאמץ 2 ולא 4, כדי להגיע לתועלת המירבית עבורה.
- יש דמיון בין משחק זה לדילמת האסיר, אנוכיות (רציונליות השותפות מביאה בסופו של דבר לתוצאות לא רצויות.
- נשים לב שלסינרגיה אין השפעה על אי-יעילות נקודת שיווי המשקל.
- כדאי לפתור בעיה זו ע"י חוזה בין השותפות, כיוון שתקשורת בין השותפות לא תעזור.

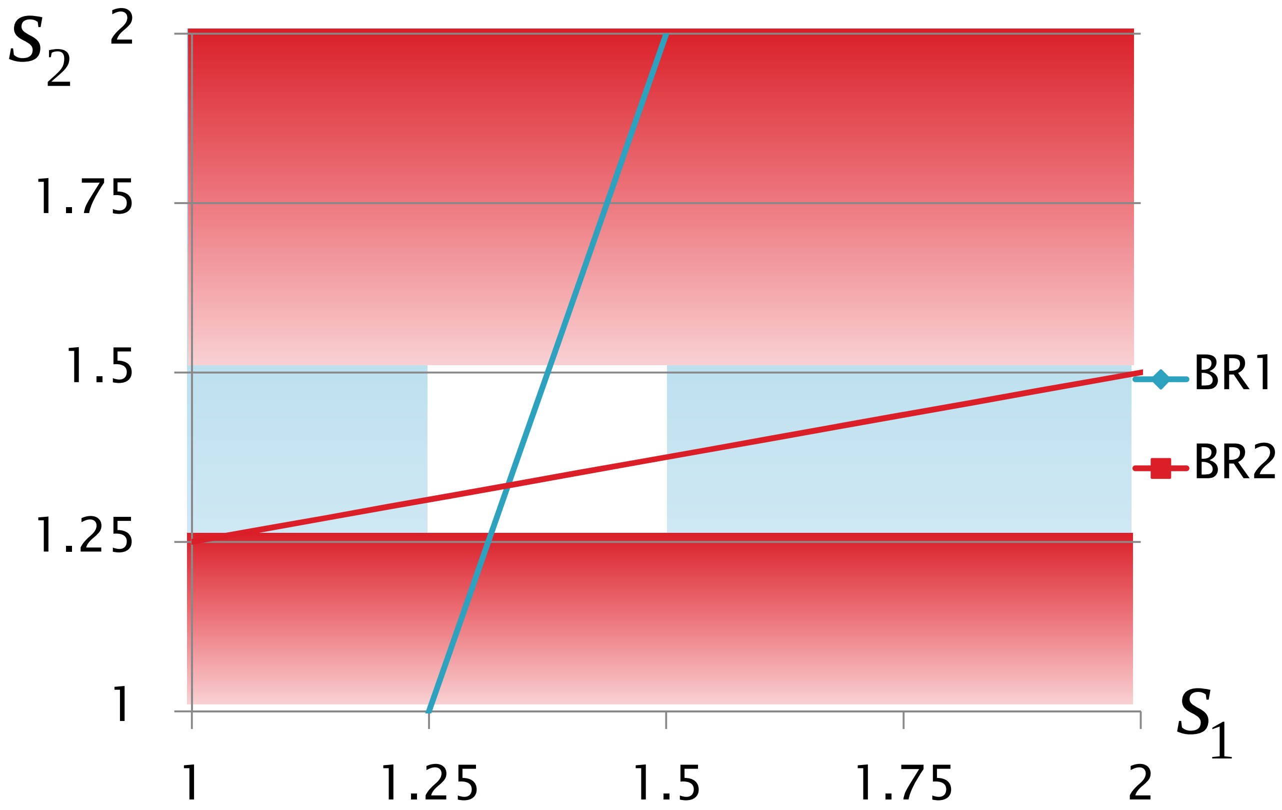
משחק השותפות
התכנסות לנקודת שיווי המשקל

- במשחק השותפות נקודת שיווי המשקל היא פתרון של המשחק ע"י מחיקת אסטרטגיות נשלטות:
- ניתן למחוק אסטרטגיות שהן אף פעם לא תגובה מיטבית.

אף שותפה לא תבחר אסטרטגיה בין 0 ל 1 ובין 2 ל 4 כיוון שאלה לעולם לא תגובות מיטביות.



- נתמקד בריבוע $[1,2] \times [1,2]$:
- קיבלנו העתק של הבעיה הקודמת.
- אף שותפה לא תבחר באסטרטגיה בין 1 ל 1.25 ובין 1.5 ל 2.

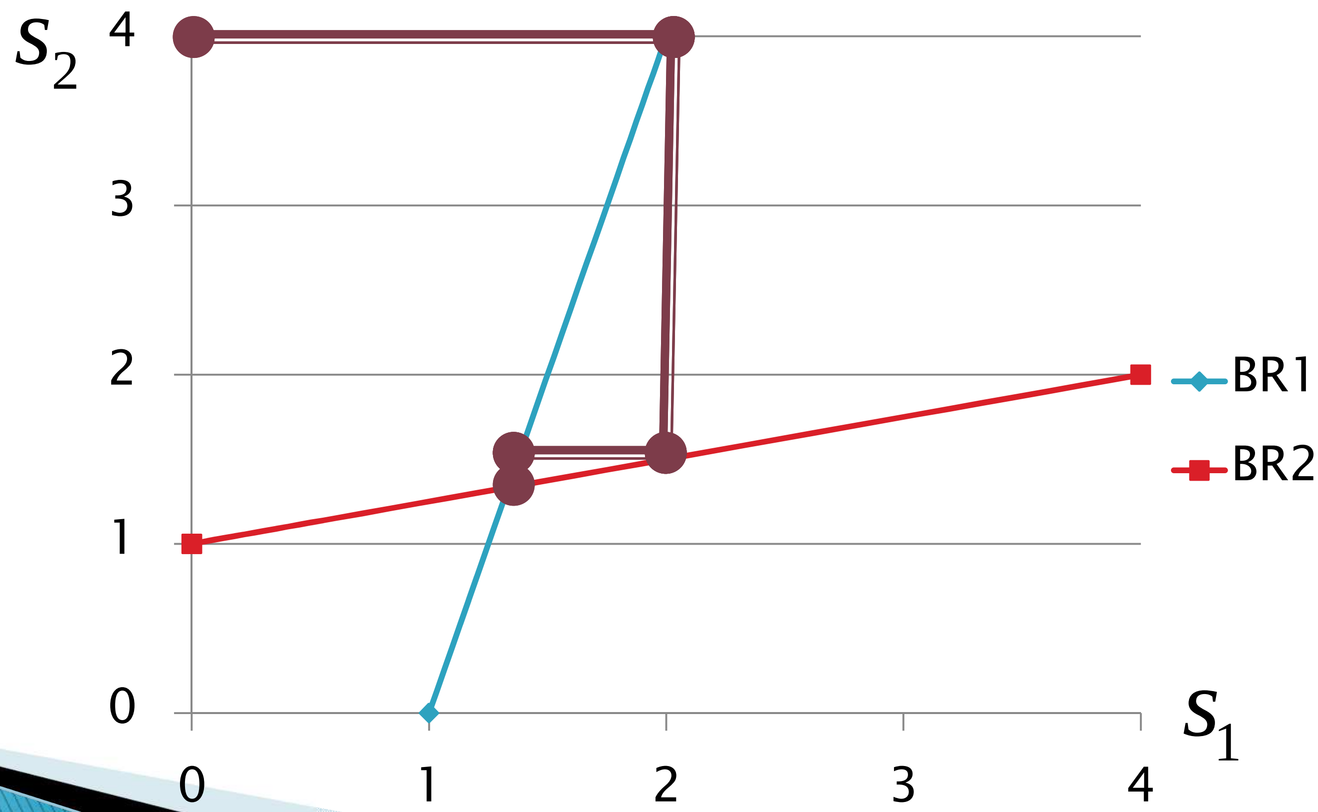


- אם נמשיך כך נקבל התכנסות אל הנקודה $(\frac{4}{3},\frac{4}{3})$.

משחק השותפות

התכנסות לנקודת שיווי המשקל – דרך אחרת

- אם שותפה 1 מאמינה ששותפה 2 תעבוד במאמץ 4 אז היא תבחר במאמץ 2.
- אם שותפה 2 יודעת על אמונתה של שותפה 1 אזי היא תבחר ב 1.5
- ...



משחק על ריבוע היחידה

- השחקנים: P_1, P_2.
- האסטרטגיות $s_i \in [0,1]$.
- פונקציות התשלומים הן:

$$u_1(x,y) = 3xy - 2x - 2y + 2$$
$$u_2(x,y) = -4xy + 3x + y$$

- נחשב את $BR_1(y)$:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}(x,y) = 3y - 2$$

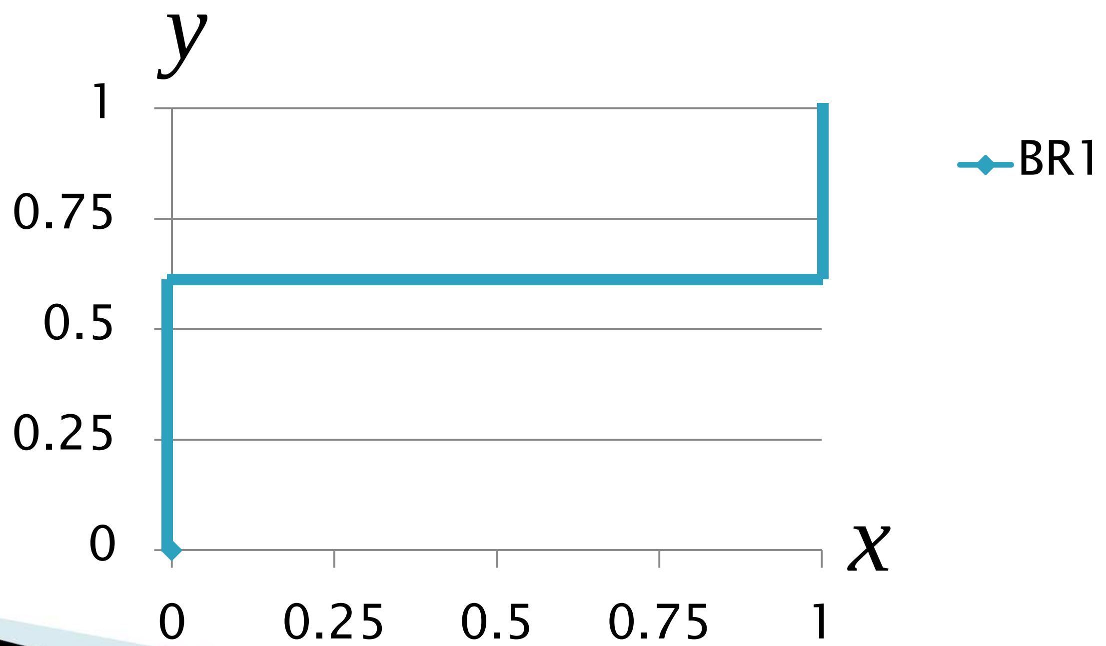
- אנחנו רואים שכאשר $y \neq \frac{2}{3}$, אין לפונקציה נקודות קיצון בקטע $(0,1)$ -- עבור כל בחירה של y הפונקציה מתארת קו ישר.

- כאשר $y = \frac{2}{3}$ הפונקציה $u_1(x,\frac{2}{3})$ קבועה. לכן כל תגובה x של שחקן 1 היא תגובה מיטבית ל $y = \frac{2}{3}$, כלומר:

$$BR_1\left(\frac{2}{3}\right) = [0,1]$$

- לגבי ערכים $y \neq \frac{2}{3}$ צריך לבדוק את נקודות השפה כדי לקבוע מהי התגובה הטובה ביותר:
  - עבור $y \in [0,\frac{2}{3})$ השיפוע שלילי ולכן התגובה המיטבית היא $x = 0$.
  - עבור $y \in (\frac{2}{3},1]$ השיפוע הוא חיובי, ולכן התגובה המיטבית היא $x = 1$.

$$BR_1(y) = \begin{cases} 0 & y \in [0, \frac{2}{3}) \\ [0,1] & y = \frac{2}{3} \\ 1 & y \in (\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$



- בצורה דומה מחשבים את $BR_2(x)$ ומקבלים:

$$BR_2(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \frac{1}{4}) \\ [0,1] & x = \frac{1}{4} \\ 0 & x \in (\frac{1}{4}, 1] \end{cases}$$