88-236 חשבון אינפיניטיסימלי 4

תרגיל בית 4

תאריך הגשה: 05.09.2011

1. יהי $\gamma : D \to \mathbb{R}^n$ משטח חלק, $D \subset \mathbb{R}^k$ תחום קומפקטי קמור, A תבנית דיפרנציאלית מסדר k הוכיחו או הפריכו

א. אם B תבנית דיפרנציאלית מסדר k, b מספר ממשי אזי $A+bB$ תבנית דיפרנציאלית מסדר k.

ב. אם $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ העתקה ליניארית אזי האינטגרל של A על $T \circ \gamma$ שווה לאינטגרל של A על γ כפול הדטרמיננטה של T.

ג. אם $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ גזירה n פעמים ברציפות, וקיים b ממשי שעבורו לכל תבנית דיפרנציאלית A מסדר k מתקיים שהאינטגרל של A על $T \circ \gamma$ שווה ל-b כפול האינטגרל של A על γ אזי T חייבת להיות העתקה ליניארית עם דטרמיננטה b.

2. יהי $\gamma : [1,2]^2 \to \mathbb{R}^n$ משטח חלק ו-A תבנית דיפרנציאלית, חשבו את האינטגרל של A על γ במקרים הבאים:

א. $\gamma(s,t) = (s^2 + t^2, t-s, t+s)$, $A = (x+yz)dxdy + (z-y)dydz + (y^2 + z^2 - x)dxdz$.

ב. $\gamma(s,t) = (1, t\cos(\pi s), t\sin(\pi s))$,

$$A = xe^{-y^6+2x-z^2}\cos(yz^2+3xy)dxdy + (\sin(x^2-1)\cos(yz-y+e^z) + xe^{-y^2-z^2})dydz + \\ + 2xyzdxdz$$.

3. יהי $\gamma : [0,1]^a \to \mathbb{R}^n$ משטח חלק ו- A תבנית דיפרנציאלית, חשבו את האינטגרל של A על γ בעזרת חוק סטוקס במקרים הבאים:

א. $\gamma(s,t) = (2\cos(2\pi t), 3\sin(2\pi t)\cos(\pi s), \sin(2\pi t)\sin(\pi s))$,

$$A = (9x^2z + 3x^2y^3 + ze^{x+y})dxdy + (4y^2x + 7y^4e^{-z} + e^{x+y})dydz + \\ + (e^{x^2\sin(z)}\cos(x^3z) - 36zx^2 + 2e^{x+y})dxdz$$.

ב. $\gamma(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), \sin(2\pi t))$,

$A = (e^{2x^2+1} + zy + y)dx + (\cos(y^3) + xz + z)dy + (\sin(z^5) + xy - x)dz$.

4. יהי $\gamma : D \to \mathbb{R}^n$ משטח חלק, $D \subset \mathbb{R}^k$ תחום קומפקטי קמור, A תבנית דיפרנציאלית מסדר k שגזירה ברציפות n פעמים, ו-$F \subset R^n$ תחום אוריאנטבילי שהשפה שלו היא המשטח γ.
הוכיחו או הפריכו:

א. הסגור של F (שהוא גם האיחוד של F והשפה שלו) קומפקטי.

ב. אם F קומפקטי, $T : D \to D$ חד-חד ערכית ועל וגם גזירה ברציפות n פעמים, אזי האינטגרל של A על $\gamma \circ T \circ T$ שווה לאינטגרל של הנגזרת של A על F (כשהאינטגרל על F בכיוון החיובי).

ג. אם F קומפקטי, $k = n-1$, האינטגרל של הנגזרת של A על F הוא 0, אזי האינטגרל של A על משטח ממימד k ששווה לשפה של עצמו הוא 0.