התסברות מתמטית - תרגיל תש"פ

11 באפריל 2020

סיגמא אלגברה/משתנים מקריים/בורל קנטלי/ריכוז מידה

1. יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות. הוכח/ הפרך: $\mathcal{F}^c$ סיגמא־אלגברה. ($\mathcal{F}^c$ המשלים של $\mathcal{F}$ ב־ $P(\Omega)$).

2. תהי $A\subseteq\Omega$ תת קבוצה במרחב ההסתברות $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$.
נגדיר $\Gamma=\{B\,|\,B\cap A=A \ or\ B\cap A=\emptyset\}$. הוכח כי Γ הוא σ־אלגברה.

3. תהי $\Omega\neq\emptyset$. ויהי $E\neq\emptyset$ אוסף כלשהו של תתי קבוצות מ־ Ω. נסמן ב־ B את אוסף כל הסיגמא־אלגבראות של Ω המכילות את E.

   (א) יהי $P(\Omega)$ אוסף כל תתי הקבוצות של Ω. הוכיחו כי $P(\Omega)$ היא סיגמא־אלגברה. הסיקו כי $B\neq\emptyset$.

   (ב) נגדיר $A_E=\bigcap\limits_{A\in B}A$הוכח כי A_E היא סיגמא־ אלגברה.

   (ג) הוכיחו כי A_E היא הסיגמא אלגברה המינימלית המכילה את E.

4. תהי $A\subseteq P(X)$ סיגמא אלגברה על X. תהי $Y\subseteq X$ תת קבוצה.

   (א) קבעו האם $\{B\in A\,|\,B\subseteq Y\}$ ו־ $\{B\cap Y\,|\,B\in A\}$ הן סיגמא אלגבראות. כיצד תשתנה תשובתכם אם נתון בנוסף כי $Y\in A$.

   (ב) יהי $(\Omega,A,\mathbb{P})$ מרחב הסתברות. ותהי $B\in A$ כך ש: $P(B)>0$.
   נגדיר $(B,A_B,\mathbb{P}_{\mathbb{B}})$ באופן הבא: $A_B=\{C\cap B\,|\,C\in A\}$ ולכל קבוצה $D\in A_B$ נגדיר $P_B(C)=P(C)/P(B)$
   הוכח: $(B,A_B,\mathbb{P}_{\mathbb{B}})$ מרחב הסתברות.

5. יהי X משתנה מקרי בעל פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f_x(t)=\begin{cases}2*t & t\in[0,\frac{1}{2}]\\ 1 & t\in(\frac{1}{2},1]\\ c & t\in(1,2]\\ 0 & else\end{cases}$$

   (א) מצאו את c.

   (ב) חשבו את $\mathbb{P}(\frac{1}{3}<t<\frac{3}{4})$.

(ג) חשבו את התוחלת של X.

6. יהיו $X_1, X_2, ...$ סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות אחידה בקטע $[0,1]$ ($\forall_i X_i \sim U([0,1])$). נגדיר סדרה חדשה של משתנים מקריים:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} Y_n = X_n \cdot X_{n+1}$$

(א) האם קיימים אינסוף X_n המקיימים $X_n < \frac{1}{n}$?
(ב) האם קיימים אינסוף X_n המקיימים $X_n < \frac{1}{n^2}$?
(ג) האם קיימים אינסוף Y_n המקיימים $Y_n < \frac{1}{8n}$?

7. יהיו $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ מספרים ממשיים בקטע $[0,1]$. ותהי $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת מספרים חיוביים המקיימת $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$. הראו, שקיים $x \in [0,1]$ המקיים

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b_n^2}{|x-a_n|}\right) < \infty$$

רמז: הגרילו את x הגדירו מאורעות מתאימים והשתמשו בבורל קנטלי.

8. סיזיפוזה התרנגולת מטילה כל בוקר 3 ביצים. בלילה היא דוגרת על ביצה שלמה מקרית (הנבחרת באופן אחיד), וזו בוקעת עד הבוקר. מה הסיכוי שתוטל ביצה שתשאר שלמה עד סוף הימים?

9. יהי $X \sim Exponential(\lambda)$ השתמש באי שיוויון צ'בישב למציאת חסם עליון עבור

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq b)$$

עבור $b > 0$.

10. יהי $X \sim Exponential(\lambda)$ השתמש באי שיוויון צ'רנוף (רמז: השתמשו בניסוח המשתמש בפונקציה יוצרת מומנטים) למציאת חסם עליון עבור

$$\mathbb{P}(X \geq a)$$

עבור $a < \mathbb{E}[X]$. מדוע בשאלה אנו חייבים להניח כי $\mathbb{E}[X] < a$?
(רמז: השווה את החסם שמצאת עם הערך האמיתי של $\mathbb{P}(X \geq a)$)

11. יהי Xמשתנה מקרי חיובי. השתמש באי שיוויון ינסן, עבור $a \in \mathbb{R}$:

(א) לאילו ערכים של a $\mathbb{E}[X^a] = (\mathbb{E}[X])^a$
(ב) לאילו ערכים של a $\mathbb{E}[X^a] \geq (\mathbb{E}[X])^a$
(ג) לאילו ערכים של a $\mathbb{E}[X^a] \leq (\mathbb{E}[X])^a$

12. יהיו $X_1, ..., X_n$ n משתנים מקריים בלתי תלויים כך ש- $\forall_i\ X_i \sim Bernouli(\frac{1}{2})$ הוכח:

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=0}^{n} X_i \geq a + \frac{n}{2}\right) \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}$$