אוניברסיטת בר אילן,
המחלקה למדעי המחשב.

קורס: 89-133, אינפי 2, סמסטר ב', תשע"ו.

מתרגלים: אורלי בארשבסקי, מיכאל מיכאלי, ביאנה שטיינבוך-פרידמן, מני שלוסברג.

בוחן אמצע 16.05.16

הנחיות כלליות:

- משך הבוחן 90 דקות ללא הארכת זמן. לא תינתן כל הארכה מכל סוג שהוא ללא אישור ממדור בחינות.
- כתבו את שמכם ואת שם המתרגל שלכם על גבי הכריכה.
- יש לכתוב בעט שחור/כחול בלבד.
- אין להשתמש בשום חומר עזר למעט מחשבון פשוט.
- בבוחן 4 שאלות. יש לענות על כולן.
- כל שאלה שווה 27 נקודות אך כל ציון מעל 100 ייחשב כ-100.
- יש לנמק כל טענה שאתם מנסחים באופן מלא.

1. מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה $f(x)=\int_0^{\sqrt{x}} t^2e^{-t}dt$ בתחום $x>0$.

<u>פתרון</u>

מהמשפט היסודי של החדו"א ניתן לקבוע שהפונקציה $f(x)=\int_0^{\sqrt{x}} t^2e^{-t}dt$ גזירה בתחום $x>0$ כי :

☜ t^2e^{-t} רציפה ולכן $f(u)=\int_0^{u} t^2e^{-t}dt$ גזירה,

☜ הפונקציה $u=\sqrt{x}$ גזירה בתחום $x>0$,

הרכבה של פונקציות גזירות היא פונקציה גזירה ולכן $f(u(x))=\int_0^{\sqrt{x}} t^2e^{-t}dt$ גזירה בתחום $x>0$ נעזר בכלל השרשרת ונקבל:

$$f'(x)=\left(\int_0^{\sqrt{x}} t^2e^{-t}dt\right)'=\left(\sqrt{x}\right)^2 e^{-\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{2}e^{-\sqrt{x}}$$

מתקיים $f'(x)>0$ לכל x בתחום $x>0$ ולכן $f(x)$ פונקציה עולה בתחום $(0,\infty)$.

2. חשב את האינטגרל: $\int_0^4 \sqrt{x^2-6x+9}\,dx$.

<u>פתרון</u>

כאן צריך לזכור את העובדות הבאות:

$$\sqrt{x^2}=|x|,\qquad |x-a|=\begin{cases}-(x-a) & x\le a\\ (x-a) & x\ge a\end{cases}$$

$$\int_0^4\sqrt{x^2-6x+9}\,dx=\int_0^4\sqrt{(x-3)^2}\,dx=\int_0^4|x-3|\,dx=\int_0^3(-x+3)dx+\int_3^4(x-3)dx=$$

$$(-\frac{1}{2}x^2+3x)|_0^3+(\frac{1}{2}x^2-3x)|_3^4=5$$

3. חשב את הגבול $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)$.

<u>פתרון</u>

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n^2}{(n+1)^2}+\frac{n^2}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{n^2}{(2n)^2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}\right)$$

זהו גבול של סכומי רימן המתאימים לסדרת חלוקות שוות נורמלית של הקטע $[0,1]$ ושל בחירת נקודת קצה ימניות בכל תת קטע עבור הפונקציה $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$.

פונקציה זו רציפה בקטע הנ"ל ולכן אינטגרבילית בו. מכאן,

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}\right)=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}dx$$

מנוסחת ניוטון לייבניץ $\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}dx=-\frac{1}{1+x}\Big|_0^1=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$ ולכן

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

4. יהא C מספר קבוע ותהא $f(x)$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ כך שבכל

נקודה רציונלית בקטע מתקיים $f(x)=C$. הראה כי בהכרח: $\int_a^b f(x)=C(b-a)$.

__**הוכחה**__

עפ"י הנתון $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$. במצב זה לכל סדרת חלוקות נורמלית

$\{T_n\}$ (כלומר עבורה $\lim_{n\to\infty}\lambda(T_n)=0$) ולכל בחירה של נקודות

$\{\alpha^{(n)}\}=\{(\alpha_1^{(n)},\alpha_2^{(n)},\ldots,\alpha_{k_n}^{(n)})\}$ יתקיים $\lim_{n\to\infty}\sigma(T_n,\alpha^{(n)})=\int_a^b f(x)dx$. לכל $n\in\mathbb{N}$ תהי T_n

חלוקה שווה של הקטע עם $\lambda(T_n)=\frac{b-a}{n}$ ובכל תת קטע נבחר נקודות רציונליות.

מתקיים, $\lim_{n\to\infty}\lambda(T_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}=0$ וכן

$$\sigma(T_n,\alpha^n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n}\cdot C=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}C=C(b-a)\xrightarrow[n\to\infty]{}C(b-a).$$

בהצלחה!