תרגול 8 – אינפי 2 למדעי המחשב

הגדרה: טור פונקציות מהצורה

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

נקרא טור חזקות סביב הנקודה $x = x_0$ $(x_0 \in \mathbb{R})$.

משפט: תהי x_0 נקודה כלשהי ב־$\mathbb{R}$. אז לכל טור חזקות סביב הנקודה x_0 קיים מספר יחיד $0 \leq R \leq \infty$ כך שעבור $|x-x_0| < R$ הטור מתכנס ועבור $|x-x_0| > R$ הטור מתבדר. אם $R=0$ הטור מתכנס בנקודה $x=x_0$ בלבד, אם $R=\infty$ הטור מתכנס לכל x ממשי. ל־R קוראים **הרדיוס התכנסות** של הטור.

הערה: אם R הוא רדיוס התכנסות של טור חזקות סביב $x=x_0$, אז בקצוות הקטע (x_0-R, x_0+R) (כלומר בנקודות $x = x_0 \pm R$) הטור יכול להתכנס או להתבדר. כמו כן, לכל נקודה $a \in (x_0-R, x_0+R)$ הנמצאת בפנים הקטע הטור מתכנס בהחלט.

<u>משפט קושי־אדמר</u>: רדיוס ההתכנסות R נתון ע"י

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$$

<u>משפט דלאמבר</u>: אם קיים הגבול $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ (במובן הרחב), אז $R = L$.

<u>תרגיל</u>: מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים הבאים:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n+1)!}(x-4)^n$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^{2n}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-nx}$
4. $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{n^2}$

<u>פתרון</u>:

1. לפי דלאמבר:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{(2n+1)!}}{\frac{2^{n+1}}{(2n+3)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{(2n+3)!}{(2n+1)!}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!}{(2n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(2n+3)(2n+2)=\infty.$$

לכן הטור מתכנס לכל x.

.2

נציב $t=x^2$ ונעבור לטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}t^n$. לפי דלאמבר, רדיוס ההתכנסות הוא

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

נבדוק את הקצוות:

<u>$t=e$</u>: נקבל את הטור החיובי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}e^n$. אם נסמן $a_n=\frac{n!}{n^n}e^n$ נקבל ש

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!e^n}=\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}>1$$

כיוון ש- $e\nearrow(1+\frac{1}{n})^n$. מכאן שהסדרה $\{a_n\}$ מונוטונית עולה וחיובית, ולא מתקיים התנאי ההכרחי להתכנסות $a_n\to 0$. לכן הטור מתבדר.

<u>$t=-e$</u>: נקבל את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{n^n}e^n$. אם נסמן $a_n=(-1)^n\frac{n!}{n^n}e^n$ נקבל כמקודם ש

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}>1$$

מכאן שהסדרה $\{|a_n|\}$ מונוטונית עולה וחיובית ו־$|a_n|\not\to 0$. אבל אז גם $a_n\not\to 0$ ושוב קיבלנו התבדרות.

בסה"כ הטור מתכנס $\iff |t|<e \iff x^2<e \iff -\sqrt{e}<x<\sqrt{e}$

.3

נציב $t=e^{-x}$ ונעבור לטור $\sum_{n=1}^{\infty}n^2t^n$. לפי דלאמבר, רדיוס ההתכנסות הוא

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1$$

בקצוות $t=\pm 1$ קל לראות שלא מתקיים תנאי הכרחי להתכנסות, ולכן יש שם התבדרות.

בסה"כ הטור מתכנס $\iff |t|<1 \iff e^{-x}<1 \iff x>0$

4. בסעיף זה לא ניתן להשתמש במבחן דלאמבר כי חלק ממקדמי הטור a_n מתאפסים. למעשה מקדמי הטור נתונים בצורה מפורשת כ־ $a_n = \begin{cases} 3^{\sqrt{n}}, n\, is\, a\, square\, number, \\ 0, otherwise. \end{cases}$. לכן ממשפט קושי־אדמר נקבל

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}|3^{\sqrt{n}}|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}3^{\frac{1}{\sqrt{n}}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

לכן הרדיוס התכנסות הוא אחד ולכן הטור מתכנס בקטע $(-1,1)$. קל לבדוק שהטור מתבדר בקצוות $x = \pm 1$.

התכנסות במידה שווה

משפט: א. אם טור החזקות מתבדר בנקודה $x = R$ אז הוא אינו יכול להתכנס במ"ש בקטע $(-R, R)$.

ב. אם טור החזקות מתכנס, אפילו בתנאי, בנקודה $x = R$ [בנקודה $x = -R$] אז הוא מתכנס במ"ש בקטע $[0, R]$ [בקטע $[-R, 0]$].

ג. הטור מתכנס במידה שווה בכל קטע סגור השייך לתחום ההתכנסות שלו.

<u>גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות</u>

יהי $R > 0$ רדיוס ההתכנסות של טור החזקות $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. אזי לכל $|x| < R$ מתקיים:

א. <u>גזירה איבר־איבר</u>:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

ורדיוס ההתכנסות של טור זה הוא גם R.

ב. <u>אינטגרציה איבר־איבר</u>:

$$\int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

ורדיוס ההתכנסות של טור זה הוא גם R.

דוגמאות: מצאו את סכומי הטורים הבאים:

$$1.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \qquad\qquad 2.\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}(2n-1)x^{2n-2}$$

פתרון:

1. ניתן לבדוק מיידית, ממשפט קושי־אדמר, שהרדיוס התכנסות של הטור הוא 1 (לא ניתן להשתמש במשפט דלמבר כי חלק ממקדמי הטור מתאפסים). לכן ממשפט הגזירה איבר איבר נקבל שלכל $|x| < 1$ מתקיים

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)x^{2n-2}}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$$

כאשר במעבר האחרון השתמשנו בנוסחא לסדרה הנדסית אינסופית. ממשפט הגזירה איבר איבר, הרדיוס התכנסות של טור הנגזרות גם שווה לאחד ולכן ממשפט האינטגרציה איבר איבר נקבל שלכל $|x| < 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{2n-2}dt = \int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}t^{2n-2}dt$$

$$= \int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n-1}}{2n-1}\right)'dt = \int_0^x\frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln|1+t| - \ln|1-t|\right)\Big|_{t=0}^{t=x} = \frac{1}{2}\left(\ln|1+x| - \ln|1-x|\right).$$

2. גם בסעיף זה ניתן לבדוק מיידית שהרדיוס התכנסות הוא אחד, לכן ממשפט האינטגרציה איבר איבר נקבל שלכל $|x| < 1$ מתקיים

$$\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(2n-1)t^{2n-2}dt = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(2n-1)\int_0^x t^{2n-2}dt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(2n-1)\frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n-1} = \frac{x}{1+x^2}.$$

לכן ע"י גזירה של שני האגפים נקבל שלכל $|x| < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(2n-1)x^{2n-2} = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

תרגיל: חשבו את סכום הטור ההרמוני המתחלף

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$$

פתרון: ננסה למצוא נוסחה לסכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ (מתוך כוונה להציב בה $x=1$).

אנו יודעים שעבור $|x|<1$ מתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^{n-1}=\frac{1}{1+x}$$

(טור גיאומטרי). זהו טור חזקות, לכן בתחום $|x|<1$ ניתן לבצע אינטגרציה איבר־איבר ולקבל:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(-1)^{n-1}t^{n-1}dt=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt$$

כלומר

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\ln|1+x|$$

ז"א $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\ln|1+x|$ לכל $|x|<1$. אבל אנחנו מעוניינים להציב דווקא $x=1$. לשם כך ניעזר במשפט הבא:

משפט (אבל): אם לכל $|x|<R$ מתקיים $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S(x)$, והטור מתכנס בקצה $x=R$ ($x=-R$), אז $S(x)$ רציפה מימין (משמאל) בקצה $x=R$ ($x=-R$).

במקרה שלנו, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\ln|1+x|$ לכל $|x|<1$, והטור מתכנס בקצה $x=1$, לכן לפי המשפט:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\lim_{x\to1^-}\ln|1+x|=\ln 2$$

תרגיל: מצאו טור חזקות שסכומו $S(x)=\arctan x$. מהו רדיוס ההתכנסות שלו?

פתרון: נשים לב כי

$$S(x)=\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-t^2)^n\right)dt$$

הטור הגיאומטרי $\sum_{n=0}^{\infty}(-t^2)^n$ הוא טור חזקות עם רדיוס התכנסות $R=1$. בתחום ההתכנסות ניתן לבצע אינטגרציה איבר־איבר, לכן עבור $|x|<1$

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-t^2)^ndt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^nt^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

וכיוון שרדיוס ההתכנסות של טור חזקות נשמר תחת אינטגרציה, רדיוס ההתכנסות של טור זה הוא $R=1$. למעשה, כיוון שהטור מתכנס גם בקצוות $x=\pm1$ (טור לייבניץ), נסיק ש

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\ ,\ |x|\le 1$$