מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 6

1. <u>הגדרה</u>. הקבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת *תחום כוכבי* ב-$\mathbb{R}^n$ (*עם המרכז בנקודה* $o \in A$) אם לכל $x \in A$ מתקיים $[o,x] \subseteq A$.
<u>הוכיחו</u> שכל תחום כוכבי ב-$\mathbb{R}^n$ הוא תת מרחב קשיר מסילתית.

2. יהי X מ"ט כך שלכל x קיימת סביבה U_x קשירה מסילתית.
<u>הוכיחו</u> שכל רכ"מ במרחב הזה פתוח.

3. יהיו (X,τ_1) , (X,τ_2) שני מ"ט, כך ש-$\tau_2 \subseteq \tau_1$.
א' יהי (X,τ_1) קומפקטי . <u>הוכיחו</u> ש-(X,τ_2) קומפקטי.
ב' יהי (X,τ_2) האוסדורף. <u>הוכיחו</u> ש-(X,τ_1) האוסדורף.

4. יהיו $A,B \subseteq \mathbb{R}^n$ שתי קבוצות זרות סגורות וחסומות.
<u>הוכיחו</u> שקיימות קבוצות U,V פתוחות וזרות
כך ש- $A \subseteq U$ ו- $B \subseteq V$.

5. <u>הוכיחו</u> שמ"ט X הוא מרחב האוסדורף א"א לכל $x \in X$ מתקיים:
$$\bigcap_{\substack{x \in F^{\circ} \\ F-\text{סגורה}}} F = \{x\}$$

6. יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים, Y מרחב האוסדורף
ו- $f,g\colon X \to Y$ שתי פונקציות רציפות.
<u>הוכיחו</u> שתת-קבוצה $\{x \in X | f(x) = g(x)\}$ סגורה.