תרגיל 4

2 באפריל 2020

1. תהי $A = \mathbb{R} \cup \{p\}$ עבור $p \notin \mathbb{R}$, עם הטופולוגיה הבאה: $\tau = P(\mathbb{R}) \cup \{B \subseteq A : |B^c| \leq \aleph_0\}$. הוכיחו שזוהי אכן טופולוגיה.

2. (א) תהי X קבוצה עם הטופולוגיה הקו־סופית. נניח שיש קבוצה $A \neq \emptyset, X$ שהיא סגוחה. הוכיחו כי X סופית.

   (ב) יהי (X, τ) מרחב טופולוגי אינסופי. נניח שהקבוצה הפתוחה האינסופית היחידה היא X. האם (X, τ) היא הטופולוגיה הטריויאלית? (למחשבה: האם יש דוגמא כזאת שבה יש אינסוף קבוצות פתוחות?)

3. נציג הוכחה טופולוגית לקיומם של אינסוף ראשוניים.
   יהי a שלם ו־d טבעי. נגדיר $S_{a,d} = a + d\mathbb{Z} = \{a + dm \,|\, m \in \mathbb{Z}\}$. נגדיר טופולוגיה τ על השלמים באופן הבא: קבוצה O היא פתוחה אם ורק אם O היא איחוד של קבוצות מהצורה $S_{a,d}$.

   (א) הוכיחו כי $(\mathbb{Z}, \tau)$ הוא מרחב טופולוגי.

   (ב) הסבירו מדוע לכל a ו־d, הקבוצה $S_{a,d}$ פתוחה.

   (ג) הוכיחו שלכל a ו־d, הקבוצה $S_{a,d}$ סגורה.

   (ד) נסמן $A = \bigcup_p S_{0,p}$ כאשר p ראשוני. הראו כי $A^c = \{1, -1\}$.

   (ה) הניחו בשלילה שמספר הראשוניים סופי. האמנם A^c יכולה להיות קבוצה פתוחה?

הערה: את ההוכחה הנ"ל גילה בצעירותו פרופ' הלל פורסטנברג מהאוניברסיטה העברית, שזכה לאחרונה בפרס אבל.