טופולוגיה תרגיל 9 תשע"ז

1. הוכיחו/הפריכו: אם $A, B \subseteq X$ קשירים מסילתית ו־ $A \cap cl(B) \neq \emptyset$ אז $A \cup B$ קשיר מסילתית.

2. הוכיחו שכל תת־קבוצה אמיתית (נאותה) צפופה ב$\mathbb{R}$ היא לא קשירה.

3. הכיחו:

   (א) תת מרחב של מרחב ממימד 0 הוא גם ממימד 0.

   (ב) תת מרחב של מרחב totally disconnected הוא גם totally disconnected.

   - הגדרה: מרחב הוא totally disconnecte אם רכיבי הקשירות שלו הם נקודונים.

4. (א) תהיינה $A, B \subseteq X$ תת־קבוצות סגורות כך ש־ $A \cap B$ ו־ $A \cup B$ קשירים. הוכיחו כי A, B קשירים.

   (ב) הראו שהדרישה ש A, B הן סגורות היא הכרחית.

5. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

   (א) כל רכיב קשירות מסילתית הוא קבוצה סגורה.

   (ב) אם A קבוצה סגוחה וקשירה א היא רכיב קשירות.

   (ג) אם הגרף של פונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ הוא קבוצה קשירה ב $\mathbb{R}^2$ אז f רציפה.

6. יהי Xמרחב מטרי קשיר, האם ההשלמה שלו (למרחב מטרי שלם) הוא גם מרחב קשיר?

7. האם התת־קבוצות הבאות של $\mathbb{R}^2$ קשירות?

   (א) $A = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Q} \vee y \in \mathbb{Q}\}$;

   (ב) $B = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$;

   (ג) $C = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Q} \vee x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$

   (רמז: מספיק למתוא תת־קבוצה קשירה וצפופה כדי להוכיח שמרחב הוא קשיר).

8. יהי מרחב X ותת־מרחב $Y \subseteq X$. יהי $a \in Y$ ו K_X, K_Y רכיבי הקשירות של a ב־X, Y בהתאמה. הוכיחו כי $K_Y \subseteq K_X$.