משוואות דיפרנציאליות רגילות - תרגול 10

הערות לגבי התרגול הקודם:

1. משוואת הרמיט $y''-2xy'+cy=0$

פתרנו בעזרת טור $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

וקיבלנו את כלל הנסיגה/רקורסיה:

$$a_{n+2}=\frac{2n-c}{(n+2)(n+1)}a_n$$

נוכל להציב n-ים והפתרון יקבל את הצורה הבאה:

$$y=a_0\underbrace{\left(1-\frac{c}{2\cdot 1}x^2+\frac{(4-c)(-c)}{4!}x^4+\dots\right)}_{\text{טור זוגי}}+a_1\underbrace{\left(x+\frac{2-c}{3\cdot 2}x^3+\dots\right)}_{\text{טור אי-זוגי}}$$

אם נבחר $a_1=0,\ a_0=1$ נקבל פתרון כטור חזקות זוגיות,

ואם נבחר $a_1=1,\ a_0=0$ נקבל פתרון כטור חזקות אי-זוגיות.

אם $c=2k$ נקבל שהטור הזוגי יהיה סופי, דהיינו פולינום.

הפולינומים שמקבלים נקראים פולינומי הרמיט מספר k.

2. בסוף התרגול דיברנו על הקשר בין משוואת אוילר למקדמים קבועים (הצבנו $x=e^t \iff t=\ln x$), נעיר כי ניתן לפתור את משוואת אוילר גם ע"י הצבות פשוטות כמו $y=x^\lambda$.

נראה דוגמא:

$$x^2y''-3xy'+3y=0$$

פתרון: ננחש $y=x^\lambda$ ונציב במשוואה

$$y'=\lambda x^{\lambda-1}$$
$$y''=\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$$

$$\Rightarrow\ x^2\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}-3x\cdot\lambda x^{\lambda-1}+3x^\lambda=0$$

$$x^\lambda(\lambda^2-4\lambda+3)=0$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=2\pm1 \Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=3$$

$$\Rightarrow\ \boxed{y(x)=C_1x+C_2x^3}$$

תרגיל: (נסו לפתור בעזרת השיטה שראינו בתרגול האחרון, מעבר למקדמים קבועים. ונקבל את אותו הפתרון.

- מה לגבי מקדמים לא אנליטיים במד"ר?

<u>הגדרה:</u> למשוואה $y''+p(x)y'+Q(x)y=0$ אומרים ש $x=x_0$ היא <u>נקודה אורדינרית</u> (Ordinary point) אם $p(x)$, $Q(x)$ רגולריות (אנליטיות) ב-x_0.

אחרת, אומרים ש $x=x_0$ היא <u>נקודה סינגולרית</u> (singular point).

<u>שתי אפשרויות לנקודה סינגולרית:</u>

<u>א.</u> אם $x=x_0$ נקודה סינגולרית ו $\lim_{x\to x_0}(x-x_0)p(x)$ ו $\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2Q(x)$ קיימים, אזי הנקודה נקראת <u>סינגולרית רגולרית</u> (סדירה) (regular singular point)

<u>ב.</u> <u>אחרת</u>, לא מתקיימים התנאים של הגבולות, הנקודה נקראת <u>סינגולרית לא רגולרית</u> (בלתי סדירה) (irregular singular point)

<u>משפט פרוביניוס</u> (גרמני) Fordinand Georg Frobenius

למשוואה $y''+p(x)y'+Q(x)y=0$ אם $x=x_0$ היא נקודה סינגולרית רגולרית, והפונק' $(x-x_0)p(x)$ ו $(x-x_0)^2Q(x)$ הן אנליטיות, אזי קיים לפחות פתרון אחד של המד"ר, בצורה:

$$y(x)=(x-x_0)^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot(x-x_0)^n$$

כאשר α_1,α_2 קבועים (לאו בהכרח שלמים או ממשיים!)

- השוואת המקדמים של החזקה הנמוכה ביותר של $(x-x_0)$ ל-אפס תתן משוואה ריבועית על α שנקראת המשוואה/פולינום האינדיציאלי.

• המקרה הפשוט הוא שמקבלים שני שורשים ממשיים שונים $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ כך שההפרש בניהם <u>לא שלם</u> $\alpha_1-\alpha_2\notin\mathbb{Z}$ ואז ניתן למצוא שני פתרונות בת"ל.

• המקרה המסובך הוא שמקבלים שני שורשים רק שההפרש <u>שלם</u> $\alpha_1-\alpha_2\in\mathbb{Z}$ ואז מקבלים רק פתרון אחד וצריך להשתמש בשיטות הורדת הסדר לקבלת פתרון נוסף.

<u>דוגמא</u> פתור $4xy''+2y'+y=0$ בשיטת פרובניוס.

<u>פתרון:</u> נעביר לצורה נורמלית, ז"א נחלק ב-$4x$ ונקבל

$$y''+\frac{1}{2x}y'+\frac{y}{4x}=0 .$$

הנקודה $x=0$ היא נקודה סינגולרית רגולרית. שכן

$$\lim_{x\to0} x\cdot p(x)=\lim_{x\to0} x\cdot\frac{1}{2x}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to0} x^2Q(x)=\lim_{x\to0} x^2\cdot\frac{1}{4x}=\boxed{0}$$

(ז"א: $xp(x)=\frac{1}{2}$; $x^2Q(x)=\frac{1}{4}x$ אנליטיות)

נחפש פתרון מהצורה $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\alpha}$

$$\Rightarrow\quad y'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)a_nx^{n+\alpha-1}$$

$$y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha-1)(n+\alpha)a_nx^{n+\alpha-2}$$

נציב במד"ר <u>המקורית</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty}4(n+\alpha-1)(n+\alpha)a_nx^{n+\alpha-1}+\sum_{n=0}^{\infty}2(n+\alpha)a_nx^{n+\alpha-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\alpha}=0$$

החזקה הכי קטנה תהיה $\alpha-1$, אפשר להוציא $n=0$ מהסכום ולכן

$$4(\alpha-1)\alpha a_0x^{\alpha-1}+\sum_{n=1}^{\infty}4(n+\alpha-1)(n+\alpha)x^{n+\alpha-1}+2\alpha a_0x^{\alpha-1}+\sum_{n=1}^{\infty}2(n+\alpha)a_nx^{n+\alpha-1}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\alpha}=0$$

מהשוואת מקדמים של $x^{\alpha-1}$ נקבל את <u>המשוואה</u> הבאה:

$$4(\alpha-1)\alpha a_0+2\alpha a_0=0$$

$$a_0(4\alpha^2-2\alpha)=0$$

דורשים $a_0\neq0$ ומקבלים $4\alpha^2-2\alpha=0$ (המשוואה האינדיציאלית)

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 0 \quad , \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}}$$

בטורים שנותרו במשוואה נתחיל את הסכום מ-0 ולא מ 1
ונוכל לקבל השוואה למקדמים של $x^{n-\alpha}$

$$\left[4(n+\alpha)(n+\alpha+1) + 2(n+\alpha+1)\right] a_{n+1} + a_n = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{n+1} = \frac{-a_n}{2(n+\alpha+1)(2n+2\alpha+1)}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

• כעת נמצא את הפתרון הראשון: עבור $\alpha_1 = 0$ נקבל כלל נסיגה:

$$a_{n+1} = \frac{-a_n}{2(n+1)(2n+1)} = \frac{-a_n}{(2n+2)(2n+1)}$$

נציב מספר n-ים לניחוש:

$\underline{n=0}$: $$a_1 = \frac{-a_0}{2\cdot 1} = -\frac{a_0}{1\cdot 2}$$

$\underline{n=1}$: $$a_2 = -\frac{a_1}{4\cdot 3} = \frac{a_0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

$\underline{n=2}$: $$a_3 = -\frac{a_2}{6\cdot 5} = -\frac{a_0}{6!}$$

וניתן להראות כי

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot a_0$$

ולכן הפתרון יהיה

$$y_1(x) = x^{\alpha_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot a_0 \cdot x^n$$

$$= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot\left(\sqrt{x}\right)^{2n} = \boxed{a_0 \cos\sqrt{x}}$$

במידה $\underline{\underline{x>0}}$!

3831

כעת נמצא את הפתרון השני עבור $\alpha_2=\frac{1}{2}$:

נקבל כלל נסיגה:

$$a_{n+1}=\frac{-a_n}{2(n+\frac{3}{2})(2n+2)}=\frac{-a_n}{(2n+3)(2n+2)}$$

נציב מספר ח-יק לניחוש:

$\underline{n=0}$: $$a_1=\frac{-a_0}{3\cdot 2}$$

$\underline{n=1}$: $$a_2=\frac{-a_1}{5\cdot 4}=\frac{a_0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

$\underline{n=2}$: $$a_3=\frac{-a_2}{7\cdot 6}=\frac{a_0}{7!}$$

וניתן להראות כי

$$a_n=\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}a_0$$

$$\Rightarrow y_2(x)=x^{\frac{1}{2}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}a_0\cdot\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^n=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{n+\frac{1}{2}}$$

$$=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\sqrt{x}\right)^{2n+1}\underset{\text{במידה ו-}x>0}{=}a_0\cdot\sin\sqrt{x}$$

לכן הפתרון הכללי:

$$\boxed{y(x)=C_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n+C_2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{n+\frac{1}{2}}}$$

ובמידה ו- $x>0$ ניתן לכתוב את הפתרון הכללי בצורה:

$$\boxed{y(x)=C_1\cos\sqrt{x}+C_2\sin\sqrt{x}}$$

שימו לב $\alpha_1-\alpha_2\notin\mathbb{Z}$ ולכן קיבלנו שני פתרונות בת"ל!

הערה חשובה: לא תמיד ניתן למצוא את האיבר הכללי מכלל הנסיגה, גם לא באמצעות פונקציית גמא, במקרים כאלה מפתחים את הטור בכמה איברים ראשונים לפחות והשאר יקיימו את כלל הנסיגה.

סינגולריות באינסוף - ∞

בהינתן המד"ר $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$

נרצה להבין מהי התנהגות הפתרון כאשר $x\to\infty$.

לצורך כך מחליפים קואורדינטות באופן הבא:

$z=\frac{1}{x}$ וכעת נסתכל על $z=0$

$$\frac{d}{dx}=\frac{d}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{d}{dz}=-z^2\frac{d}{dz}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}=z^2\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{d}{dz}\right)=z^4\frac{d^2}{dz^2}+2z^3\frac{d}{dz}$$

נציב במד"ר המקורית ונקבל:

$$z^4\cdot\frac{d^2y}{dz^2}+2z^3\frac{dy}{dz}-z^2P\left(\frac{1}{z}\right)\frac{dy}{dz}+Q\left(\frac{1}{z}\right)y=0 \quad / \div z^4$$

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\underbrace{\frac{2z-P\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2}}_{P(z)}\cdot\frac{dy}{dz}+\underbrace{\frac{1}{z^4}\cdot Q\left(\frac{1}{z}\right)}_{Q(z)}y=0$$

הגדרה: אורדינריות ב-∞ אם הפונקציות החדשות P,Q אנליטיות ב-$z=0$.

- יש סינגולריות רגולרית ב-∞ אם $\lim_{z\to0}\frac{2z-P\left(\frac{1}{z}\right)}{z}$ ו-$\lim_{z\to0}\frac{1}{z^2}Q\left(\frac{1}{z}\right)$ קיימים!

- אחרת, יש סינגולריות לא רגולרית באינסוף.