17.7.12

אלגברה לינארית 1 - הרצאה 3

כפל מטריצות:

$A\in\mathbb{F}^{m\times k}$ $B\in\mathbb{F}^{k\times n}$

$A\cdot B=C\in\mathbb{F}^{m\times n}$

$C_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+\dots+a_{ik}\cdot b_{kj}$

$C_{ij}=\sum_{l=1}^{k}a_{il}b_{lj}$

עוברים על שורה משמאל ועל טור מימין, ומכפילים לפי מקומות.

דוגמה:

1)

$A\in\mathbb{R}^{3\times 2}$ $B\in\mathbb{R}^{2\times 4}$

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\0&-1\\3&4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-5&-2&0&1\\-3&0&6&2\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}2\cdot(-5)+1\cdot(-3), & 2\cdot(-2)+1\cdot0, & 2\cdot0+1\cdot6, & 2\cdot1+1\cdot2\\ 0\cdot(-5)+(-1)\cdot(-3), & 0\cdot(-2)+(-1)\cdot0, & 0\cdot0+(-1)\cdot6, & 0\cdot1+(-1)\cdot2\\ 3\cdot(-5)+4\cdot(-3), & 3\cdot(-2)+4\cdot0, & 3\cdot0+4\cdot6, & 3\cdot1+4\cdot2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-13, & -4, & 6, & 4\\ 3, & 0, & -6, & -2\\ -27, & -6, & 24, & 11\end{pmatrix}$$

המכפלה BA אינה מוגדרת - מספר העמודות ב-A שונה ממספר השורות ב-B

2)

$A=(5,1,4)\in\mathbb{R}^{1\times3}$ $B=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times1}$

$AB=(7)$

$$BA=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}\cdot(5,1,4)=\begin{pmatrix}10&2&8\\-15&-3&-12\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$AB\neq BA$ מכפלת מטריצות אינה חילופית!

הערה:

$\mathbb{F}^{n\times n}$ אינו שדה!

$\mathbb{F}^{n\times n}$ - אוסף המטריצות בגודל nxn מעל F

דוגמה:

$\mathbb{R}^{3\times3}$

$$B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$ בלוק ז'ורדן

$AB=0\Leftarrow A,B$ מחלקי אפס.

$A^3=0$

תכונות הכפל:

בכל אחד מהמקרים הבאים, אם אחד מהאגפים מוגדר אזי גם השני מוגדר ושווה לו:

1. $A(B+C)=AB+AC$ פילוג

התנאי: $A\in\mathbb{F}^{m\times k}$ $B,C\in\mathbb{F}^{k\times n}$

$(B+C)A=BA+CA$

התנאי: $A\in\mathbb{F}^{n\times m}$ $B,C\in\mathbb{F}^{k\times n}$

2. $A(BC)=(AB)C$ אסוציאטיביות

התנאי: $C\in\mathbb{F}^{k\times l}$ $B\in\mathbb{F}^{n\times k}$ $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$

3. ~~$A\in\mathbb{F}^{m\times k}$~~ $\alpha(AB)=(\alpha A)B$ הכפלה בסקלר

התנאי: $\alpha\in\mathbb{F}$, $B\in\mathbb{F}^{k\times n}$, $A\in\mathbb{F}^{m\times k}$

4. $0_{m\times m}\cdot A_{m\times n}=A_{m\times n}\cdot 0_{n\times m}=0_{m\times n}$ הכפלה במטריצת אפס

הוכחות (חלק):

1. $\underbrace{A\underbrace{(B+C)}_{D}}_{G}\overset{?}{=}\underbrace{\underbrace{AB}_{E}+\underbrace{AC}_{F}}_{H}$

צ"ל: $g_{ij}=h_{ij}$

אגף שמאל: $d_{ij}=b_{ij}+c_{ij}$

$g_{ij}=a_{i1}d_{1j}+a_{i2}d_{2j}+\dots+a_{ik}d_{kj}$ *

$g_{ij}=a_{i1}(b_{1j}+c_{1j})+\dots+a_{ik}\cdot(b_{kj}+c_{kj})$

אגף ימין:

$e_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{ik}b_{kj}$

$f_{ij}=a_{i1}c_{1j}+a_{i2}c_{2j}+\dots+a_{ik}c_{kj}$

$h_{ij}=a_{i1}(b_{1j}+c_{1j})+\dots+a_{ik}(b_{kj}+c_{kj})$

$\Downarrow$

$g_{ij}=h_{ij}$ $\square$

2. $\underbrace{A\underbrace{(BC)}_{D}}_{F}\overset{?}{=}\underbrace{\underbrace{(AB)}_{E}C}_{G}$

צ"ל: $f_{ij}=g_{ij}$

אגף שמאל:

$d_{ij}=b_{i1}c_{1j}+\dots+b_{ik}c_{kj}$

$f_{sj}=a_{s1}d_{1j}+\dots+a_{sn}d_{nj}$

$f_{sj}=a_{s1}(b_{11}c_{1j}+\dots+b_{1k}c_{kj})+\dots+a_{sn}(b_{n1}c_{1j}+\dots+b_{nk}c_{kj})$

$f_{sj}=\sum_{t=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{k}(a_{st}\cdot b_{tr}\cdot c_{rj})\right)$

אגף ימין:

$g_{sj}=e_{s1}\cdot c_{1j}+\dots+e_{sk}\cdot c_{kj}$ *

$e_{sl}=a_{s1}b_{1l}+\dots+a_{sn}b_{nl}$

$g_{sj}=(a_{s1}b_{11}+\dots+a_{sn}b_{n1})\cdot c_{1j}+\dots+(a_{s1}b_{1k}+\dots+a_{sn}b_{nk})c_{kj}$

$g_{sj}=\sum_{t=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{k}(a_{st}b_{tr}c_{rj})\right)$

$\Downarrow$

$f_{sj}=g_{sj}$ $\square$

!! הערה:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=b_1\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\iff\underbrace{\begin{pmatrix}a_{11}&\dots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{m1}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix}}_{\text{מטריצת המקדמים } A}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}}_{\text{וקטור הנעלמים } \vec{x}}=\underbrace{\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}}_{\text{וקטור הקבועים } \vec{b}}$$

$$\Updownarrow\quad \boxed{A\vec{x}=\vec{b}}$$

המכפלה יוצרת אותה מערכת משוואות!

$$\begin{pmatrix}2&5\\7&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\9\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}2x+5y=8\\7x+6y=9\end{cases}$$

משפט: הקשר בין פתרונות מע' לא הומוגנית לבין פתרון מערכת הומוגנית מתאימה

נתונה מערכת משוואות לא הומוגנית $A\vec{x}=\vec{b}$ פתירה - שיש פתרון v_0 עבורה. $A\in F^{m\times n}$

נסמן: $H=\{v\in F^n \mid Av=0\}$ קבוצת הפתרונות של המערכת ההומוגנית. $F^n=F^{n\times 1}$

$L=\{v\in F^n \mid Av=b\}$ קבוצת הפתרונות של המערכת הלא הומוגנית.

$L_1=\{v_0+v \mid v\in H\}$

אז מתקיים $L=L_1$.

הוכחה: הכלה דו כיוונית

כיוון ראשון: $L_1\subseteq L$ - צ"ל

נתון $v_0+v\in L_1 \Rightarrow v\in H$

צ"ל $v_0+v\in L$, כלומר מקיים את התנאי של L: ~~$A(v_0+v)$~~

$$A(v_0+v)=\underbrace{Av_0}_{=b}+\underbrace{Av}_{=0}=b$$

לפי פילוג במטריצה

לכן $v_0+v\in L$.

כיוון שני: $L\subseteq L_1$ - צ"ל

$u\in L \Leftarrow u$ מקיים ש- $A\vec{u}=\vec{b}$.

צ"ל: $u=v+v_0$ עבור $v\in H$ כלשהו.

"שיטת מצליח"

נניח שהצלחנו אז $v=u-v_0$

$v_0+v=v_0+(u-v_0)=(v_0+(-v_0))+u=0+u=u$ על מנת להראות שזה מוגדר

נראה ש- $v=0$

$$Av=A(u-v_0)=\underbrace{Au}_{b}-\underbrace{Av_0}_{b}=b-b=0\Rightarrow v\in H$$

סה"כ - $\left\{\begin{array}{l} L_1\subseteq L \\ L\subseteq L_1 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{L=L_1}$

דוגמה:

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}}_{2\times 2}\overset{\vec{x}}{\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}}_{2\times 1}=\begin{pmatrix} \boxed{2}\cdot 6+\boxed{3}\cdot 7 \\ \boxed{4}\cdot 6+\boxed{5}\cdot 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\cdot 6+\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}\cdot 7$$

$$(8\,,\,9)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}=(8\cdot 2+9\cdot 4,\ 8\cdot 3+9\cdot 5)=8\cdot(2,3)+9\cdot(4,5)$$

משפט:

$$A=\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}\in \mathbb{F}^{m\times n}$$

כפל עמודה-עמודה

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=x_1(v_1)+x_2(v_2)+\dots+x_n(v_n)=$$

$$=x_1\vec{v}_1+x_2\vec{v}_2+\dots+x_n\vec{v}_n=\sum_{i=1}^{n}x_i C_i(A)$$

$C_i(A)$ - העמודה ה-i של A

הוכחה: אלו עמודות ולכן מספיק להראות

שאיבר במקום i בצד שמאל = איבר במקום i בצד ימין

בצד שמאל:

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

האיבר במקום i:

$$a_{i1}\cdot x_1+a_{i2}\cdot x_2+\dots+a_{in}\cdot x_n$$

בצד ימין:

$$a_{i1}\cdot x_1+a_{i2}\cdot x_2+\dots+a_{in}\cdot x_n$$

קיבלנו ~~...~~ שוויון

בצורה דומה ניתן להוכיח את המשפט הבא.

משפט:

$$A=\begin{pmatrix} — u_1 — \\ — u_2 — \\ — u_m — \end{pmatrix}\in \mathbb{F}^{m\times n}$$

כפל שורה-שורה

$$(x_1,\dots,x_m)\cdot A=x_1\vec{u}_1+x_2\vec{u}_2+\dots+x_n\vec{u}_n$$

משפט:

$$A\in \mathbb{F}^{m\times k} \qquad B\in \mathbb{F}^{k\times n}$$

א. כפל עמודה-עמודה

$$B=\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$AB=A\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} | & & | \\ Av_1 & \cdots & Av_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

ב. כפל שורה-שורה

$$A=\begin{pmatrix} — u_1 — \\ \vdots \\ — u_m — \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix} — u_1 B — \\ \vdots \\ — u_m B — \end{pmatrix}$$

הוכחה - ניתן לחשב איבר כללי (i,j)

דוגמה:

נתונה מערכת $Ax=b$, ויש לה פתרונות $\vec{v}_1,\vec{v}_2$.

חשבו את $A(v_1+v_2,\ v_1-v_2,\ 2v_1+3v_2)=?$

פתרון:

$\vec{v}_1,\vec{v}_2$ פתרונות ולכן $Av_1=b$

$Av_2=b$

$$\big(A(v_1+v_2),\ A(v_1-v_2),\ A(2v_1+3v_2)\big)=(2b,0,5b)$$

הגדרה: שחלוף$=$transpose - החלפת השורות והעמודות אלו באלו

$A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ $\qquad (A^T)_{ij}=A_{ji}$

תכונות השחלוף:

1. $A^{T^T}=A$ ~~($A^{T^T}=A$)~~
2. $(\alpha A)^T=\alpha A^T$ $\qquad$ התנאי: $\alpha\in\mathbb{F}$
3. $(A+B)^T=A^T+B^T$ $\qquad$ התנאי: $A,B\in\mathbb{F}^{m\times n}$
4. $(AB)^T=B^T A^T$ $\qquad$ התנאי: $A\in\mathbb{F}^{m\times k},B\in\mathbb{F}^{k\times n}$

הגדרה:

מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ נקראת סימטרית אם $A=A^T$.

מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ נקראת אנטי סימטרית אם $A=-A^T$.

הגדרה:

מטריצה מסדר $n\times n$ נקראת ריבועית

סוגי מטריצות ריבועיות:

1. משולשית: עליונה - עבור $j<i$ מתקיים $a_{ij}=0$. $\begin{pmatrix}2&0&4\\0&1&5\\0&0&8\end{pmatrix}$

תחתונה - עבור $i<j$ מתקיים $a_{ij}=0$. $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\4&5&8\end{pmatrix}$

2. אלכסונית: $a_{ij}=0$ לכל $i\neq j$. $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&-8\end{pmatrix}$

3. סקלרית: a_{ij} קבוע לכל $i=j$. $\begin{pmatrix}\alpha&&0\\&\ddots&\\0&&\alpha\end{pmatrix}$

4. מטריצת היחידה/הזהות: $I_n=\begin{pmatrix}1&&0\\&\ddots&\\0&&1\end{pmatrix}_{n\times n}$ $\quad a_{ij}=0$ לכל $i\neq j$, $a_{ij}=1$ לכל $i=j$.

תכונות ~~ה~~מטריצת היחידה:

לכל $A\in F^{m\times n}$ מתקיים:

$I_mA=A$

$AI_n=A$

נוכיח את $AI_n=A$:

$$AI_n=A\cdot\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&\vdots&&\vdots\\\vdots&0&&1\\0&0&&\end{pmatrix}=A(e_1,\dots,e_n)=(Ae_1,\dots,Ae_n)\underset{\uparrow}{=}(C_1(A),\dots,C_n(A))=A$$

לפי משפטים מהשיעור

הגדרה: עקבה = trace - סכום איברי האלכסון

$A\in F^{n\times n}$ אזי העקבה של A מוגדרת כך:

$$trace(A)=tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$

תכונות העקבה: $(A,B\in F^{n\times n})$

1. $tr(A)=tr(A^T)$
2. $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$
3. $tr(\alpha A)=\alpha\, tr(A)$ הערה: $\alpha\in F$
4. $tr(AB)=tr(BA)$

הוכחה: (4)

$D=AB$ $\cancel{C=BA}$ $\cancel{D=AB}$ $C=BA$

$$c_{kk}=\sum_{i=1}^{n}b_{ki}a_{ik}\qquad d_{kk}=\sum_{i=1}^{n}a_{ki}b_{ik}$$

$$tr(C)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}b_{ki}a_{ik}=tr(D)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ki}b_{ik}$$