פיתרון תרגיל בית 11 במתמטיקה בדידה 2
83-118 סמסטר ב' תשע"ו

5 ביוני 2016

1. מספר התלמידים בכיתה הוא 34. ציון של תלמיד הוא מספר טבעי בין אפס לבין מאה, כולל. מצאו כמה אפשרויות יש להעניק ציון לתלמידים כך שהציון הממוצע בכיתה יהיה 87. (רמז: מה צריך להיות סכום הציונים?)

פיתרון ישנם 34 סטודנטים. נסמן ב x_i את הציון שקיבל סטודנט i (כאשר $1 \le i \le 34$). כיוון שהממוצע הוא 87 מתקיים כי

$$\frac{\sum_{i=1}^{34} x_i}{34} = 87$$

כאשר $0 \le x_i \le 100$ לכל i. המשוואה שקולה לכך שמתקיים כי $\sum_{i=1}^{34} x_i = 2958 = 87 \cdot 34$. נגדיר את הקבוצות הבאות:

(א) U מספר האפשרויות לפתור את המשוואה כאשר יש רק את האילוצים $0 \le x_i$ ללא האילוצים הנוספים $x_i \le 100$.

(ב) לכל i נגדיר את A_i להיות קבוצת האפשרויות לפתור את המשוואה כאשר $x_i \ge 101$ ואין אילוצים על המשתנים האחרים (כלומר לכל j ששונה מ i יתכן כי $x_j \le 100$).

(ג) מסקנה: הקבוצה $A_i \cap A_j$ מכילה את האפשרויות לפתור את המשוואה כאשר $x_i \ge 101 \wedge x_j \ge 101$.

(ד) וכך הלאה לגבי שאר האפשרויות לחיתוכים של קבוצות.

כעת, נחשב את הגדלים של הקבוצות (והחיתוכים שלהן...):

(א) כיוון שבקבוצה U אין שום אילוץ על x_i-ים, אז זאת פשוט הנוסחה של מנייה בלי סדר ועם חזרה, ונקבל $|U| = \binom{34+2958-1}{34-1}$.

(ב) לכל i, עבור חישוב A_i, סטונדט i קיבל לפחות 101 נקודות, כלומר קיים האילוץ $x_i \ge 101$. נשים לב שבמקום המשוואה

$$\sum_{i=1}^{34} x_i = 2958$$

עם האילוצים $x_i \ge 101$ ולכל $j \ne i$ $x_j \ge 0$, אפשר להסתכל על המשוואה

$$\sum_{i=1}^{34} x_i = 2958 - 101$$

עם האילוצים $x_j \geq 0$ לכל j.

ולכן הגודל של A_i הוא $|A_i| = \binom{34+2859-1}{34-1}$.

(ג) באופן דומה עבור $A_i \cap A_j$ ניתן לחשוב על המשוואה

$$\sum_{i=1}^{34} x_i = 2958 - 202$$

עם האילוצים $x_j \geq 0$ לכל j. ובאופן דומה נקבל כי $|A_i \cap A_j| = \binom{34+2756-1}{34-1}$.

(ד) ניתן לראות עקביות: עד לחיתוך של $29 = 2958/101$ (מעוגל למטה) של קבוצות (לא יכול להיות ש־30 ומעלה תלמידים קיבלו מעל 100, השאר קיבלו ציון לא שלילי והממוצע 87, ולכן עוצמת החיתוך של 30 ומעלה קבוצות היא 0 ולא תורמת בנוסחת ההכלה והדחה כלום).

כעת נוכל לחשב את גודל הקבוצה

$$\bigcap_{i=1}^{34} A_i^c$$

כי זאת בדיוק קבוצת כל הפתרונות למשוואה כך שלכל i מתקיים $x_i \leq 100$ ביחד עם התנאי שחוזר בכל הקבוצות של $x_i \leq 0$, וזהו הגודל המבוקש בשאלה. נחשב אותו בעזרת הכלה־הדחה. מתקיים

$$\bigcap_{i=1}^{34} A_i^c = \left(\bigcup_{i=1}^{34} A_i\right)^c = U \setminus \bigcup_{i=1}^{34} A_i$$

ולכן הגודל המבוקש הוא $|U| - \left|\cup_{i=1}^{34} A_i\right|$ נחשב בעזרת נוסחת להכלה־הדחה

$$\begin{aligned}|U| - \left|\cup_{i=1}^{34} A_i\right| &= |U| - \sum_{i=1}^{34} |A_i| + \sum_{i,j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i,j,k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots \\ &= \binom{34}{0}|U| - \binom{34}{1}|A_i| + \binom{34}{2}|A_i \cap A_j| - \binom{34}{3}|A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots\end{aligned}$$

ונקבל בסופו של דבר:

$$\sum_{i=0}^{29} (-1)^i \cdot \binom{34}{i} \cdot \binom{34 + 2958 - i \cdot 101 - 1}{34 - 1}$$

2. n אנשים נכנסים למסעדה. לכל אחד מהם מעיל ועניבה. בסיום הארוחה הם ממהרים לעזוב וכל אחד מהם לוקח מעיל ועניבה כלשהם. מה מספר האפשרויות שבהן אף אחד מהם לא יקבל בחזרה הן את מעילו והן את עניבתו (ייתכן שמישהו יקבל את המעיל או העניבה, אך לא את שניהם)?

פיתרון נקרא לבחירה אקראית של מעיל ועניבה "ערבוב". נסמן כמה קבוצות שתהיינה הרכיבים הדרושים להוכחה:

(א) A_i תהיה קבוצת האפשרויות שלקוח i יקבל את העניבה שלו והמעיל שלו.
נשים לב שאחרי שקבענו לאן הולך כובע ועניבה אחת בחירת השאר היא ערבוב של העניבות והמעילים ולכן $|A_i| = ((n-1)!)^2$.

(ב) U תהיה קבוצת האפשרויות לקבלת מעיל ועניבה (קבוצה אוניברסלית).
נשים לב שכל אפשרות היא בעצם ערבוב של העניבות ושל המעילים ולכן $|U| = (n!)^2$.

(ג) $A_i \cap A_j$ קבוצת האפשרויות שלקוחות j, i יקבלו, כל אחד, את העניבה שלו והמעיל שלו.
קבענו שתי עניבות ושני מעילים, ונותר לקבוע את השאר. זה בעצם ערבוב של העניבות והמעילים של השאר, כלומר: $|A_i \cap A_j| = ((n-2)!)^2$.

(ד) באופן דומה, נבדוק מה גודלה של קבוצת האפשרויות ש־k לקוחות ספציפיים יקבלו את העניבה והמעיל שלהם.
קבענו k עניבות ו־k מעילים, ונותר לקבוע את השאר. זה בעצם ערבוב של עניבות ומעילים של השאר, כלומר: $((n-k)!)^2$.

רוצים שאף אחד לא יקבל גם מעיל וגם עניבה ולכן לסיכום בעזרת עקרון ההכלה־הדחה נקבל:

$$\begin{aligned}\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right| &= \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c\right| = |U| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| \\ &= |U| - \sum_{i=1}^{n}|A_i| + \sum_{1\le i<j\le n}|A_i \cap A_j| - \sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots \\ &= \binom{n}{0}\cdot(n!)^2 - \binom{n}{1}\cdot((n-1)!)^2 + \binom{n}{2}\cdot((n-2)!)^2 - \binom{n}{3}\cdot((n-3)!)^2 + \cdots + (-1)^k\binom{n}{k}((n-k)!)^2 + \ldots = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\end{aligned}$$

3. בהטלה של 8 קוביות (בקוביה מופיעים המספרים 1 עד 6), מה הסיכוי שכל המספרים מופיעים?

פיתרון בקיצור: נגדיר את A_i להיות הקבוצה שבה המספר i לא מופיע באף אחת מן ההטלות. כלומר הטלתי 8 פעמים והיו 5 אפשרויות לכל פעם: $|A_i| = 5^8$. עבור $A_i \cap A_j$ שני מספרים לא מופיעים בהטלות ולכן $|A_i \cap A_j| = 4^8$, וכך הלאה לגבי שאר החיתוכים. באופן דומה לשאלות הקודמות:

$$\begin{aligned}\left|\bigcap_{i=1}^{6} A_i^c\right| &= \left|\left(\bigcup_{i=1}^{6} A_i\right)^c\right| = |U| - \left|\bigcup_{i=1}^{6} A_i\right| \\ &= |U| - \sum_{i=1}^{6}|A_i| + \sum_{i,j}|A_i \cap A_j| - \sum_{i,j,k}|A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots \\ &= \binom{6}{0}6^8 - \binom{6}{1}5^8 + \binom{6}{2}4^8 - \binom{6}{3}3^8 + \dots\end{aligned}$$

ותשובה סופית:

$$\sum_{i=0}^{5}(-1)^i\cdot\binom{6}{i}\cdot(6-i)^8$$

(הסכימה היא עד 5 כי לא יכול להיות שכל ששת המספרים לא התקבלו). וכיון ששאלו מה הסיכוי (טעות שלי שהעליתי כזו שאלה, לא אמורים לשאול אתכם בקורס שאלות הסתברותיות), אז צריך לחלק בסך כל האפשרויות, $|U| = 6^8$, כלומר נקבל:

$$\frac{\sum_{i=0}^{5} (-1)^i \cdot \binom{6}{i} \cdot (6-i)^8}{6^8}$$

4. בסקר על העדפות מסטיק בקרב שחקני כדורסל נמצאו הממצאים הבאים. כמה שחקני כדורסל יש? (נבדקו רק הטעמים: פירות, מנטה וענבים)

(א) 22 אוהבים פירות

(ב) 25 אוהבים מנטה

(ג) 39 ענבים

(ד) 9 מנטה ופירות

(ה) 17 פירות וענבים

(ו) 20 מנטה וענבים

(ז) 6 אוהבים הכל

(ח) 4 לא אוהבים דבר

פיתרון נסמן: B - קבוצת השחקנים, A_f - קבוצת אוהבי מסטיק פירות, A_m - קבוצת אוהבי מסטיק מנטה, A_g - קבוצת אוהבי מסטיק ענבים. נקבל מנוסחת הכלה והדחה:

$$|A_g^c \cap A_f^c \cap A_m^c| = |B| - (|A_g| + |A_f| + |A_m|) + (|A_g \cap A_f| + |A_g \cap A_m| + |A_f \cap A_m|) - |A_g \cap A_f \cap A_m|$$

נציב את הנתונים ונקבל:

$$4 = |B| - (39 + 22 + 25) + (17 + 20 + 9) - 6$$

ולכן:

$$|B| = 50$$

5. הוכח את הזהות הבאה:

$$a!b! = \sum_{i=0}^{b} \binom{b}{i} (-1)^i \frac{(a+b+1)!}{a+i+1}$$

רמז: נתונים a כדורים שחורים, b כדורים לבנים וכדור כחול אחד. כמה אפשרויות יש לסדר כך שהכדורים יופיעו בסדר הבא: כדורים לבנים, כדור כחול, כדורים שחורים?, היעזרו בהכלה והדחה!

פיתרון אגף שמאל מהרמז אומר בכמה אפשרויות אפשר לסדר כך שהכחול יופיע אחרי הכדורים הלבנים ולפני הכדורים השחורים. את הכדורים השחורים יש $b!$ אפשרויות לסדר בתוך עצמם ובאופן דומה יש $a!$ אפשרויות לסדר את הכדורים הלבנים בתוך עצמם.

אגף ימין מן הרמז: ראשית נגדיר קבוצה אוניברסלית U שתהיה אוסף האפשרויות לסדר כך שהכחול אחרי הלבנים. נקבל ש-$|U| = \frac{(a+b+1)!}{a+1}$, כי צריך לסדר את b השחורים ב-$(a+b+1)$ מקומות, שזה ניתן ב-$\frac{(a+b+1)!}{(a+1)!}$ (בלי חזרה ועם סדר), ואז להכפיל ב-$a!$ האפשרויות לסדר את a הכדורים הלבנים, כאשר הכחול יהיה בתא האחרון שנשאר אחרי סידור הלבנים. כעת אנו נדרשים להגדיר את הקבוצות A_i עבור $0 \leq i \leq b$ באופן הבא: נסמן ב A_i את קבוצת האפשרויות לסדר את הכדורים כך שהכדור הכחול יופיע אחרי הלבנים וגם אחרי i כדורים שחורים (שימו לב שכבר בהגדרת A_i החיתוך נכנס, כי הוא צריך להיות אחרי i שחורים). נקבל ש-$A_i = \frac{(a+b+1)!}{a+i+1}$. הסבר: אנו צריכים לסדר את b השחורים, למעט ה-i הראשונים, לכן בדומה להסבר על הקבוצה האוניברסלית נקבל $|A_i| = \frac{(a+b+1)!}{(a+i+1)!} \cdot (a+i)!$, ולכן בסה"כ, נוסחת ההכלה וההדחה אומרת שמספר האפשרויות לסידור לבנים, כחול, שחורים הוא:

$$\sum_{i=0}^{b} \binom{b}{i} (-1)^i \frac{(a+b+1)!}{a+i+1}$$