

בס"ד

אוניברסיטת בר-אילן
מבחן בקורס אלגברה מופשטת 1 (סמסטר קיץ)
מס': 88-211-05/07
המרצים: מיכאל מגרל ו רוני ביתן
תאריך: 30.08.09
מועד א'
חומר עזר: רק מחשבון
משך המבחן: שעתיים

השאלות – יש לענות על חמש מתוך שש:

שאלה 1.

הוכח או הפרך:

- קיים מונויד M המכיל איבר הפיך מימין אבל לא משמאל.
- קיים מונויד אינסופי כך שכל איבר שלו הוא אידמפוטנט (ז"א $a^2 = a$).
- כל מונויד סופי עם תכונת הצמצום הוא חבורה.

שאלה 2.

נגדיר דרגה של חבורה כמספר האיברים המינימלי בה שיוצרים יחד את כל החבורה.

- הוכח או הפרך: קיימת חבורה G ות"ח H עם $rank(G) = 2$, $rank(H) = 3$.
- כל חבורה אבלית G עם $rank(G) = n$ היא תמונה אפימורפית של \mathbb{Z}^m לכל $m \geq n$.
- מהי הדרגה של החבורה: $GL_2(\mathbb{Z}_2)$? הוכח את קביעתך.

שאלה 3.

א. עבור כל אחד מהסעיפים הבאים הוכח או הפרך:

כל חבורה מהסדר הנתון היא אבלית:

- 15
- 16
- 3
- 17

ב. הוכח כי החבורה S_4 היא פתירה.

ג. הוכח או הפרך:

קיימת חבורה אינסופית G כך שלכל תת קבוצה סופית $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subset G$,

תת-החבורה $\langle A \rangle$ הנוצרת ע"י A היא סופית.

שאלה 4.

(חבורת Heisenberg)

מעל הקבוצה $H := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ נגדיר פעולה:

$$(x_1, x_2, x_3) \bullet (y_1, y_2, y_3) := (x_1 + y_1 + x_3 y_2, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

א. הוכח ש (H, \bullet) היא חבורה והיא פתירה.

ב. הוכח שהיא איזומורפית לחבורת מטריצות הבאה:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

ג. מצא תת-חבורה לא נורמלית של H .

ד. מצא תת-חבורה נורמלית לא טריוויאלית (לא היחידה ולא H) של H .

שאלה 5.

א. תאר תמונות אפימורפיות של חבורת האילר: U_{71} .

ב. הראה מונומורפיזם: $\Omega_{10} \times C_{15} \rightarrow \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$.

ג. מצא מספר אוטומורפיזמים של החבורה $U_7 \times C_{25}$.

ד. מצא מספר חבורות אבליות (לא איזומורפיות) מסדר 3600.

בכמה מהן יש ת"ח 5-סילו ציקלית?

ה. כמה מחלקות צמידות יש בחבורה S_6 ?

שאלה 6.

א. הוכח את משפט Burnside (על מספר מסלולים).

ב. מצא כמה לוחות לא שקולים (עד כדי סימטריות של הריבוע) קיימים אם מותר לצבוע

(באופן אחיד משני הצדדים) ב-2 צבעים נתונים והגודל של הלוח הוא 3×3 .

בהצלחה!