מבוא לאלגברה לינארית
תרגיל 5-פתרון

1. כדי למצוא בסיס ומימד של $W = span\{v_1, v_2, v_3\}$ צריך לבדוק אילו מבין הוקטורים v_1 , v_2 , v_3 בת"ל

א.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_3 - 3R_1 \to R_3 \\ R_2 - 2R_1 \to R_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -9 & 5 \\ 0 & -11 & 8 \end{pmatrix}$$

$$9R_3 - 11R_2 \to R_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ הוקטורים בת"ל ולכן הקבוצה $\{v_1, v_2, v_3\}$ היא בסיס ל- W ו- $\dim W = 3$.

ב.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -9 & 8 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_3 - 3R_1 \to R_3 \\ R_2 - R_1 \to R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -12 & 10 \\ 0 & -12 & 10 \end{pmatrix}$$

$$R_3 - R_2 \to R_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -12 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ הוקטור v_3 תלוי לינארית ב- v_1, v_2 ולכן הקבוצה $\{v_1, v_2\}$ היא בסיס למרחב W ו- $\dim W = 2$.

2.

א.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & -6 \end{array}\right) \quad R_1 \leftrightarrow R_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 & -5 \\ 3 & -2 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} R_3 - 3R_1 \to R_3 \\ R_2 + 2R_1 \to R_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -6 & -18 \end{array}\right) \quad R_3 + 2R_2 \to R_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right)$$

$$-\frac{1}{4}R_3 \to R_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{matrix} R_2 - R_3 \to R_2 \\ R_1 - 2R_3 \to R_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$\Leftarrow$ הצירוף הלינארי הוא : $-2\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\4\\-6\end{pmatrix}$.

ב.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&0\\2&1&-3&-5\\1&3&-4&-5\end{array}\right)\quad R_3\leftrightarrow R_2\quad\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&0\\1&3&-4&-5\\2&1&-3&-5\end{array}\right)$$

$$\begin{matrix}R_3-2R_1\to R_3\\R_2-R_1\to R_2\end{matrix}\quad\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&0\\0&5&-5&-5\\0&5&-5&-5\end{array}\right)\quad R_3-R_2\to R_3\quad\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&0\\0&5&-5&-5\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\frac{1}{5}R_2\to R_2\quad\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&0\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)R_1+2R_2\to R_1\quad\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-2\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$\Leftarrow$ יש אינסוף צירופים לינאריים אפשריים :

$$(-2+t)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+(-1+t)\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-5\\-5\end{pmatrix}\quad;\quad t\in\mathbb{R}$$

ג.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&1&-2\\1&2&3&-1\\1&-3&-2&3\end{array}\right)\quad R_3\leftrightarrow R_1\quad\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&-2&3\\1&2&3&-1\\2&-1&1&-2\end{array}\right)$$

$$\begin{matrix}R_3-2R_1\to R_3\\R_2-R_1\to R_2\end{matrix}\quad\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&0\\0&5&5&-4\\0&5&5&-8\end{array}\right)\quad R_3-R_2\to R_3\quad\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&0\\0&5&5&-4\\0&0&0&-4\end{array}\right)$$

$\Leftarrow$ אי אפשר לכתוב את v כצירוף לינארי של v_1,v_2,v_3 .

.3

א.

$$\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&3&a\\1&a&3\end{pmatrix} \quad R_3\leftrightarrow R_2 \quad \begin{pmatrix}1&1&-1\\1&a&3\\2&3&a\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}R_3-2R_1\to R_3\\R_2-R_1\to R_2\end{matrix} \quad \begin{pmatrix}1&1&-1\\0&a-1&4\\0&1&a+2\end{pmatrix}$$

$$R_3\leftrightarrow R_2 \quad \begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&a+2\\0&a-1&4\end{pmatrix} \quad R_3-(a-1)R_2\to R_3 \quad \begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&a+2\\0&0&4-(a-1)(a+2)\end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ הוקטורים בת"ל אמ"ם :

$$(a+2)(a-1)-4=a^2+a-6\neq 0$$

$$a_1\neq 2\,,\,a_2\neq -3$$

ב.

עבור $a=-3$ ו- $a=2$ הוקטורים ת"ל .

ג.

אם 3 וקטורים ב - $\mathbb{R}^3$ בת"ל , אזי כל וקטור ב $\mathbb{R}^3$ ניתן לכתוב כצירוף לינארי שלהם ,

בפרט במקרה שלנו ניתן לכתוב את הוקטור $\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$ כצירוף לינארי של $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\a\\3\end{pmatrix}$,

כאשר $a\neq -3$, $a\neq 2$.

כדי למצוא את הצירוף צריך לדרג מטריצה

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\2&3&a&3\\1&a&3&2\end{array}\right) \quad R_3\leftrightarrow R_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\1&a&3&2\\2&3&a&3\end{array}\right)$$

$$\begin{matrix}R_3-2R_1\to R_3\\R_2-R_1\to R_2\end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&a-1&4&1\\0&1&a+2&1\end{array}\right)$$

$$R_3\leftrightarrow R_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&1&a+2&1\\0&a-1&4&1\end{array}\right) \quad R_3-(a-1)R_2\to R_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&1&a+2&1\\0&0&(2-a)(a+3)&2-a\end{array}\right)$$

ולכן $\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{a+3}\begin{pmatrix}1\\3\\a\end{pmatrix}+\frac{1}{a+3}\begin{pmatrix}-1\\a\\3\end{pmatrix}$

ד.

כאשר $a=2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_3 - R_1 \to R_3 \\ R_2 - 2R_1 \to R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right) \; R_3 - R_2 \to R_3 \; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$\Leftarrow$ אי אפשר לכתוב את $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ כצירוף לינארי של $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

כאשר $a = -3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_3 - R_1 \to R_3 \\ R_2 - 2R_1 \to R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 2 \end{array}\right) \; R_3 + 4R_2 \to R_3 \; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$\Leftarrow$ אי אפשר לכתוב את $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ כצירוף לינארי של $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

טל"ח