שיעורי בית 5

.

1. נתון $\phi : G_1 \to G_2$ הומומורפיזם בין חבורות. אברי היחידה הם בהתאמה: e_2 e_1. הוכיחו:

   (א) $\phi(e_1) = e_2$ [רמז: חשב $\phi(e_1 e_1)$]
   פתרון : מצד אחד $\phi(e_1 e_1) = \phi(e_1)$ ומצד שני

   $$\phi(e_1 e_1) = \phi(e_1)\phi(e_1)$$

   כיוון ש $\phi(e_2) \in G_2$ יש לו הופכי. לכן אם נכפיל את השיוון

   $$\phi(e_1)\phi(e_1) = \phi(e_1)$$

   בהופכי זה נקבל

   $$\phi(e_1) = e_2$$

   (ב) $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$לכל $g \in G_1$.
   פתרון : נחשב

   $$e_2 = \phi(e_1) = \phi(gg^{-1}) = \phi(g)\phi(g^{-1})$$

   ולכן $\phi(g), \phi(g^{-1})$ הופכיים זה לזה.

   (ג) נגדיר את הגרעין של ϕ להיות $ker(\phi) = \{x \in G_1 | \phi(x) = e_2\}$. הוכיחו כי הגרעין הוא תת־חבורה של G_1
   פתרון : בסעיף קודם ראינו כי $e_1 \in ker(\phi)$. נראה סגירות. $g, h \in ker(\phi)$ אזי

   $$\phi(gh^{-1}) = \phi(g)\phi(h^{-1}) = \phi(g)\phi(h)^{-1} = e_2 e_2^{-1} = e_2$$

   ולכן $gh^{-1} \in ker(\phi)$

   (ד) נגדיר את התמונה של ϕ להיות$Im(\phi) = \{\phi(x) | x \in G_1\}$. הוכיחו כי התמונה היא תת־חבורה של G_2.
   פתרון : $e_2 = \phi(e_1) \in Im(\phi)$. נראה סגירות. יהיו $\phi(g), \phi(h) \in Im(\phi)$כאשר $g, h \in G_1$ אזי

   $$\phi(g)\phi(h)^{-1} = \phi(g)\phi(h^{-1}) = \phi(gh^{-1}) \in Im(\phi)$$

   כי $gh^{-1} \in G_1$

2. הגדרה: ההמופריזם $\phi : G_1 \to G_2$ המוגדר $\phi(g) = e_2$ לכל $g \in G_1$ נקרא ההומורפיזם הטריוואלי.

(א) מצאו הומומורפיזם לא טריוואלי מהחבורה החיבורית $\mathbb{Z}_3$ לחבורת התמורות S_3

פתרון : כיוון ש $\mathbb{Z}_3 = \langle 1 \rangle$ ציקלית ומתקיים $3 \cdot 1 = 0$ אזי מספיק להגדיר הומורפיזם ע"י קביעה לאן שולחים את 1. נניח $1 \mapsto \sigma$ אזי σ צריכה לקיים $\sigma^3 = id$. לכן הומורפיזם אפשרי אחד הוא

$$\phi(1) = (1,2,3)$$

ואז,

$$\phi(2) = \phi(1+1) = \phi(1)\phi(1) = (1,2,3)^2 = (1,3,2)$$

וגם

$$\phi(0) = id$$

(ב) הוכח שההומומורפיזם הטריאלי הוא ההומומורפיזם היחיד מ S_3 ל $\mathbb{Z}_3$

פתרון : הוכחה: יהא הומו' ϕ אזי עבור $\sigma_1 = (1,2), \sigma_2 = (2,3)$ מתקיים:

$$0 = \phi(id) = \phi(\sigma_i^2) = 2\phi(\sigma_i)$$

אזי האיבר היחידה $a \in \mathbb{Z}_3$ המקיים $2a = 0$ הוא $a = 0$ ולכן $\phi(\sigma_i) = 0$ ולכן

$$\phi((1,2,3)) = \phi(\sigma_1\sigma_2) = \phi(\sigma_1) + \phi(\sigma_2) = 0$$

כיוון ש $(1,2,3)$ ו $(1,2)$ יוצרים של S_3 והם נשלחים לאפס אזי כל איבר ב S_3 ישלח ל־0 ולכן זהו ההומו' הטריאלי.

3. תהא G חבורה. נגדיר $Aut(G)$ להיות קבוצת כל ההומומורפיזם $\phi : G \to G$ ההפיכים (כלומר חח"ע ועל)

(א) הוכח כי $Aut(G)$ חבורה ביחס לפעולת הרכבת פונקציות.

פתרון : הוכחה:

i. יהיו $\phi_1, \phi_2 \in Aut(G)$ אזי לכל $g, h \in G$ מתקיים כי

$$(\phi_1 \circ \phi_2)(gh) = \phi_1(\phi_2(gh)) = \phi_1(\phi_2(g)\phi_2(h)) = \phi_1(\phi_2(g))\,\phi_1(\phi_2(h)) = (\phi_1 \circ \phi_2)(g)\,(\phi_1 \circ \phi_2)(h)$$

ולכן

$$\phi_1 \circ \phi_2$$

הומו'. בנוסף הרכבה של פונקציות הפיכות היא פונקציה הפיכה $\phi_1 \circ \phi_2$ הומו' הפיך ולכן יש סגירות.

ii. קיבוציות יש בכל הרכבת פונקציות

iii. איבר היחידה הוא id שגם הוא הומו'

iv. איבר הופכי : יהי $\phi \in Aut(G)$ אזי נראה כי הפונקציה ההופכית ϕ^{-1} היא גם הומו'. הוכחה

$$\left(\phi^{-1}\right)(gh) = \left(\phi^{-1}\right)(g)\left(\phi^{-1}\right)(h)$$

אמ"מ (ע"י הרכבה של ϕמשני הצדדים)

$$gh = \phi\left[\left(\phi^{-1}\right)(g)\left(\phi^{-1}\right)(h)\right]$$

שאכן מתקיים כי

$$\phi\left[\left(\phi^{-1}\right)(g)\left(\phi^{-1}\right)(h)\right] = \phi\left[\left(\phi^{-1}\right)(g)\right]\phi\left[\left(\phi^{-1}\right)(h)\right] = gh$$

(ב) נגדיר הומורפיזם של חבורות

$$\Phi : G \to Aut(G)$$

ע"י $\Phi(x) = I_x$ כאשר I_x מוגדר להיות פונקציה ההצמדה. כלומר $\forall g \in G:\ I_x(g) = xgx^{-1}$.
הוכיחו כי Φ הומורפיזם (אין צורך להוכיח כי $I_x \in Aut(G)$) ומצאו $ker(\Phi)$.
פתרון : הוכחה:

i. יהיו $x, y \in G$ אזי צריך להוכיח כי

$$\Phi(xy) = \Phi(x) \circ \Phi(y)$$

כלומר שמתקיים כי הפונקציות

$$I_{xy} = I_x \circ I_y$$

שוות. יהא $g \in G$ צריך להוכיח כי

$$I_{xy}(g) = (I_x \circ I_y)(g)$$

ואכן

ii. נמצא את הגרעין

$$Ker(\Phi) = \{x \in G :\ I_x = id\} = \left\{x \in G : \forall g\ xgx^{-1} = g\right\} = \{x \in G : \forall g\ xg = gx\} = Z(G)$$

כלומר זה המרכז $(Center)$ של החבורה.

4. כל החבורות בתרגיל זה מוגדרות עם פעולת כפל (וחבורת התמורות עם הרכבה).

(א) נביט בהעתקה $\phi : (\mathbb{R}\backslash\{0\}) \to \{-1, 1\}$ המוגדרת על ידי $\phi(x) = \frac{x}{|x|} = sign(x)$. (לדוגמה: $\phi(-3) = -1$ $\phi(3) = 1$) הוכח ש ϕ המומורפיזם ומצא את הגרעין
פתרון : הוכחה:

i. יהיו $x, y \in G = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ אזי צריך להוכיח כי

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$$

ואכן

$$\phi(xy) = \frac{xy}{|xy|} = \frac{xy}{|x||y|} = \frac{x}{|x|}\frac{y}{|y|} = \phi(x)\phi(y)$$

ii. נמצא את הגרעין

$$Ker(\phi) = \{x \in G :\ sign(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{R} :\ x > 0\}$$

(ב) : $\phi : (\mathbb{C}\backslash\{0\}) \to \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ המוגדרות על ידי $\phi(a+ib) = a^2 + b^2$. (לדוגמה: $\phi(1+2i) = 5$), הוכח שהיא הומומורפיזם ומצא את הגרעין . איזה צורה גיאומטרית יש לגרעין?
פתרון : נשים לב ש $\phi(z) = |z|^2$ כאשר $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. נמשיך להוכחה:

i. יהיו $z_1, z_2 \in G = \mathbb{C} \backslash \{0\}$ אזי צריך להוכיח כי

$$\phi(z_1 z_2) = \phi(z_1)\phi(z_1)$$

ואכן

$$\phi(z_1 z_2) = |z_1 z_2| = |z_1||z_2| = \phi(z_1)\phi(z_2)$$

ii. נמצא את הגרעין

$$Ker\,(\phi) = \{z \in G :\ |z| = 1\} = \left\{e^{i\theta} |\ \theta \in \mathbb{R}\right\}$$

כלומר מעגל היחידה.

(ג) ההומורפיזים $\phi : S_n \to \{-1, 1\}$ המוגדרת על ידי $\phi(\sigma) = sign(\sigma)$. מצא את הגרעין של ϕ

פתרון : נמצא את הגרעין

$$Ker\,(\phi) = \{\sigma \in G :\ sign(\sigma) = 1\} = A_n$$

5. תהא G חבורה, H תת חבורה. קוסט שמאלי של H הוא קבוצה מהצורה $gH = \{gh |\ h \in H\}$ עבור $g \in G$ כלשהוא (באופן דומה, קוסט ימני של H הוא קבוצה מהצורה $Hg = \{hg |\ h \in H\}$).

(א) הוכיחו כי

$$[g_1 H = g_2 H] \iff \left[g_2^{-1} g_1 \in H\right] \iff [\exists h \in H : g_1 = g_2 h]$$

לכל $g_1, g_2 \in G$.

פתרון : נתחיל ב $\left[g_2^{-1} g_1 \in H\right] \iff [\exists h \in H : g_1 = g_2 h]$

בכיוון $(\Leftarrow)$ נתון שקיים $h \in H$ כך ש $g_1 = g_2 h$. נכפיל ב g_2^{-1} משמאל ונקבל $g_2^{-1} g_1 = h \in H$. בכיוון $(\Rightarrow)$ נתון $g_2^{-1} g_1 \in H$ ולכן קיים $h \in H$ כך ש $g_2^{-1} g_1 = h$. נכפיל ב g_2 משמאל ונקבל $g_1 = g_2 h$ כנדרש.

נוכיח כי $[g_1 H = g_2 H] \iff [\exists h \in H : g_1 = g_2 h]$

בכיוון $(\Leftarrow)$ נתון שקיים $h \in H$ כך ש $g_1 = g_2 h$. נרצה להוכיח כי $g_1 H = g_2 H$, נעשה זאת בהכלה דו כיוונית: $(\subseteq)$ יהא $g_1 h' \in g_1 H$ אזי $g_1 h' = g_2 h h'$ כיוון ש H חבורה ויש סגירות גם $hh' \in H$ ולכן $g_1 h' = g_2 h h' \in g_2 H$. $(\supseteq)$ יהא $g_2 h' \in g_2 H$ אזי כיוון ש $g_2 = g_1 h^{-1}$ נקבל כי $g_2 h' = g_1 h^{-1} h'$. כיוון ש H חבורה נקבל כי $h^{-1} \in H$ וגם $h^{-1} h' \in H$ ולכן $g_2 h' = g_1 h^{-1} h' \in g_1 H$.

בכיוון $(\Rightarrow)$נתון כי $g_1 H = g_2 H$ כיוון ש $e \in H$ נקבל כי $g_1 \in g_1 H$ מנתון נקבל כי $g_1 \in g_2 H$ כלומר קיים $h \in H$ כדש $g_1 = g_2 h$ כנדרש.

(ב) נגדיר יחס $\equiv$ על G כך: לכל $g_1, g_2 \in G$

$$[g_1 \equiv g_2] \iff [g_1 H = g_2 H]$$

הוכיחו כי זהו יחס שקילות (כלומר, הוכיחו כי יחס סדר רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי).

פתרון : רפלקסיביות: לכל $g \in G$ מתקיים כי $g_1 = g_1 \cdot e$ כיוון ש $e \in H$ נקבל כי $gH = gH$ לכן $g \equiv g$.

סימטריות: נניח כי $g, g' \in G$ מקיימים $g \equiv g'$ (צ"ל $g' \equiv g$) אזי $gH = g'H$ ולכן $g'H = gH$ ולכן $g' \equiv g$.

טרנזיטיביות: יהיו $g_1, g_2, g_2 \in G$ כך ש $g_1 \equiv g_2$ וגם $g_2 \equiv g_3$ (צ"ל $g_1 \equiv g_3$) אזי $g_1 H = g_2 H$ וגם $g_2 H = g_3 H$ ולכן $g_1 H = g_3 H$ ולכן $g_2 \equiv g_3$

(ג) עבור $g \in G$ נגדיר את מחלקת השקילות של g להיות $[g]_\equiv = \{g' \in G | \, g \equiv g'\}$. הוכיחו כי $[g]_\equiv = gH$.

פתרון : בהכלה דו כיוונית. $(\subseteq)$ יהא $g' \in [g]_\equiv$ אזי $gH = g'H$ ולכן $g'H = gH$ לפי סעיף א נקבל כי $g' = gh$ עבור $h \in H$ כלשהוא ולכן $g' = gh \in gH$.

מצד שני $(\supseteq)$ יהא $g' \in gH$ אזי קיים $h \in H$ כך ש $g' = gh$ ולכן לפי סעיף א $gH = g'H$ ולכן $g \equiv g'$ ולכן $g' \in [g]_\equiv$.

(ד) את אוסף מחלקות השקילות מסמנים כ $G/H = \{gH | \, g \in G\}$. הוכיחו כי אם G סופית אזי $|G/H| = \frac{|G|}{|H|}$. (הדרכה: הוכיחו כי כל מחלקות השקילות מאותו גודל).

פתרון : נראה כי כל מחלקות השקילות מגדול $|H|$. אכן יהא $g \in G$ ותהא gH מחלקת שקילות. נגדיר פונקציה $f : H \to gH$ ע"י

$$\forall h \in H: \; f(h) = gh$$

נראה כי f חח"ע+על (וזה יראה כי $|gH| = |H|$).

חח"ע: יהיו $h_1, h_2 \in H$ כך ש $f(h_1) = f(h_2)$ אזי $gh_1 = gh_2$ נכפיל g^{-1} משמאל ונקבל $h_1 = h_2$.

על: יהא $g' \in gH$ אזי קיים $h \in H$ כך ש $g' = gh$ ולכן h הוא המקור של g' שכן $f(h) = gh = g'$.

(ה) תהא G חבורה סופית . H תת חבורה של G ו K תת חבורה של H. הוכח כי

$$|G/K| = |G/H| \cdot |H/K|$$

פתרון : נתוןממשפט לגרנז

$$|G/K| = \frac{|G|}{|K|} = \frac{|G|}{|H|} \cdot \frac{|H|}{|K|} = |G/H| \cdot |H/K|$$

.6

(א) תהא G חבורה. H תת חבורה. הוכיחו כי מספר הקוסטים השמאליים שווה למספר הקוסטים הימניים.

כלומר הקבוצות $K_1 = \{gH \,| g \in G\}$ $K_2 = \{Hg \,| g \in G\}$בעלות עוצמה שווה.

(הדרכה : הגדר $\phi : K_1 \to K_2$ ע"י $\phi(gH) = Hg^{-1}$. הוכח כי ϕ מוגדרת היטב, חח"ע ועל)

פתרון : טענה ϕ מוגדרת היטב

הוכחה: נניח $g_1H = g_2H$ צ"ל כי $\phi(g_1H) = Hg_1^{-1} = Hg_2^{-1} = \phi(g_2H)$. אם $g_1H = g_2H$

אז $g_2^{-1}g_1 \in H$ (כי $g_1 = g_1 \cdot e \in g_1H = g_2H$ ולכן קיים $h \in H$ כך ש $g_1 = g_2h$ ואז $g_2^{-1}g_1 = h \in H$)

כיוון ש H תת חבורה אז גם ההופכי $\left(g_2^{-1}g_1\right)^{-1} = g_1^{-1}g_2 \in H$

ואז $Hg_1^{-1}g_2 = H$

(כי $(\subseteq)$ נובע מכך שכפל איברים ב H שייך ל H ובכיוון $(\subseteq)$ כל $h \in H$ ניתן להצגה כ $\left[h\left(g_1^{-1}g_2\right)^{-1}\right]g_1^{-1}g_2 \in Hg_1^{-1}g_2$ $h =$)

ואז $Hg_1^{-1} = Hg_2^{-1}$

(כי $(\subseteq)$ לכל $hg_1^{-1} \in Hg_1^{-1}$ מתקיים כי $hg_1^{-1}g_2 \in H$ ולכן $hg_1^{-1}g_2 = h'$ ואז $hg_1^{-1} = h'g_2^{-1} \in Hg_2^{-1}$ $(\supseteq)$באופן דומה)

חח"ע: נניח $\phi(g_1H) = \phi(g_2H)$ צ"ל $g_1H = g_2H$

מההנחה $Hg_1^{-1} = Hg_2^{-1}$ כלומר $g_1^{-1}g_2 \in H$ כמו מקודם, H תת חבורה ולכן גם ההופכי $g_2^{-1}g_1 \in H$ ואז $g_1H = g_2H$

על: יהא $Hg \in K_2$ המקור שלו יהיה $g^{-1}H \in K_1$

(ב) תהא G חבורה. H ת"ח. הוכח כי אם הסדר של G/H הוא 2 אז מתקיים כי

$$\forall g \in G: \; gH = Hg$$

פתרון : יהא $g \in G$ צ"ל $gH = Hg$. אם $g \in G$ אזי $gH = H = Hg$

אחרת $g \notin H$ ואז $gH \neq H$ (כי יש רק 2 אברים בקבוצת המנה). מתרגיל קודם נסיק כי גם מספר הקוסטים הימניים הוא 2. כיוון ש Hg קוסט ימני שונה מ H נקבל כי $gH = G \backslash H = Hg$