תרגיל בית 9 -מתמטיקה בדידה

שאלה 1. תהי A קבוצה ו-R יחס על A. נסמן ב-$\mathrm{simc}(R)$ את היחס הסימטרי הקטן ביותר (ביחס להכלה) המכיל את R (הסגור הסימטרי של R). הוכיחו או הפריכו את הסעיפים הבאים:

(1) $\mathrm{simc}(R) = R \cup \{(b,a) \in A \times A \colon (a,b) \in R\}$

(2) הראו כי אם R הוא יחס סדר סימטרי אזי $trcl(R)$ הוא יחס סימטרי על A.

(3) אם $I(A) \subseteq R$, אזי $\mathrm{trcl}(S)$, כאשר $S = \mathrm{simc}(R)$, הוא היחס הטרנזיטיבי המינימלי (ביחס להכלה) המכיל את R.

שאלה 2. יהי $(L, \leq)$ קס"ח (במובן החלש). נניח כי כל תת-קבוצה A של L בעלת סופרימום, וכי ב-L יש איבר ראשון. הוכיחו כי הקס"ח $(L, \leq)$ סריג.

שאלה 3. עבדו תחת אקסיומות ZFC . יהי $(L, \leq)$ סריג, הראו כי אם לכל שרשרת C ב-L יש חסם מלעיל, אזי ב-L יש מקסימום.

שאלה 4. הראו כי הבאים שקולים:

(1) AC

(2) כל משפחה של קבוצות לא ריקות זרות בזוגות; $\langle A_i \colon i \in I\rangle$, קיימת קבוצה B כך ש- $B \cap A_i$ הוא יחידון לכל $i \in I$.

שאלה 5. נסתכל על הקס"ח $(\mathcal{W}, \sqsubseteq)$. כאשר:

$$\mathcal{W} := \{(A,R) \colon \text{R הוא סידור טוב של A} \}$$
$$(A_0, R_0) \sqsubseteq (A_1, R_1) \ \Leftrightarrow\ (A_0 \subseteq A_1) \wedge (R_0 \subseteq R_1)$$

(חשוב לציין כי אלה לא קבוצות אבל הניחו כי קיימת קבוצה אוניברסלית $\mathcal{U}$ בה הקס"חים מוכלים) יהי C שרשרת בקס"ח $(\mathcal{W}, \sqsubseteq)$. נסמן:

$$B := \bigcup\{A \colon \exists R\,((A,R) \in C\}$$
$$S := \bigcup\{R \colon \exists A\,((A,R) \in C\}$$

הוכיחו או הפריכו: S סידור טוב של B. במילים פשוטות: "האם איחוד של קבוצות סדורות היטב היא קבוצה סדורה היטב?".