= תוספות ותיקונים לגבי ההרצאה של ד"ר צבאן =

(יום ג', 19/10/10 למ')

א. בהגדרת "כמו דטרמיננטה", נוסיף את הדרישה שלכל מטריצה A עם שתי שורות זהות, מתקיים $f(A)=0$. (עבור מאפיין $\neq 2$ דרישה זו נובעת משתי האחרות, כמו שראינו.)

שימו לב, שכל הפונקציות שעסקנו בהוכחות היום שהן "כמו-דטרמיננטה" מקיימות גם דרישה נוספת זו, ולכן כל מה שהוכחנו יהיה נכון לכל מאפיין.

ב. פרטים להוכחה ש $\begin{vmatrix} B & C \\ 0 & D \end{vmatrix} = |B|\cdot|D|$:

הגדרנו $f(D) := \begin{vmatrix} B & C \\ 0 & D \end{vmatrix}$ וטענו ש f היא כמו-דטרמיננטה. נראה זאת:

1. אם ב D יש שתי <u>שורות זהות</u>, אז גם ב $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ יש שתי שורות זהות (איזה?), ולכן

$$f(D) = \begin{vmatrix} B & C \\ 0 & D \end{vmatrix} = 0 \quad ✓.$$

2. אם D' מתקבלת מ D ע"י <u>החלפת שורות</u> k,l $(k\neq l)$, אז $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D' \end{pmatrix}$ מתקבלת מ $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ ע"י החלפת שורות $r+k, r+l$, כאשר r הוא מס' השורות ב B. לכן,

$$f(D') = \begin{vmatrix} B & C \\ 0 & D' \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} B & C \\ 0 & D \end{vmatrix} = -f(D) \quad ✓.$$

3. <u>לינאריות בכל שורה</u>: תהי $D = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \cancel{v_i}\ \alpha v+\beta u \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ מטריצה ששורותיה הן $v_1,\dots,v_n$ פרט לשורה i, שהיא $\alpha v+\beta u$. אז

$$f(D) = \left|\begin{array}{c:c} B & C \\ \hdashline 0 & \begin{matrix} v_1 \\ \vdots \\ \alpha v+\beta u \\ \vdots \\ v_n \end{matrix} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} B & C \\ \hline \vec{0} & v_1 \\ & \vdots \\ \alpha(\vec{0}\ v)+\beta(\vec{0}\ u) & \\ & \vdots \\ \vec{0} & v_n \end{array}\right| \leftarrow i+r \quad =$$

לינ' הדט' בשורה $r+i$

$$= \alpha \begin{vmatrix} B & C \\ \vec{0} & v_1 \\ \vdots & \vdots \\ \vec{0} & v \\ \vdots & \vdots \\ \vec{0} & v_n \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} B & C \\ \vec{0} & v_1 \\ \vdots & \vdots \\ \vec{0} & u \\ \vdots & \vdots \\ \vec{0} & v_n \end{vmatrix} = \alpha f\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v \\ \vdots \\ u \end{pmatrix} + \beta f\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ u \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}. \quad ✓$$

(הוכחה ש $\begin{vmatrix} B & C \\ 0 & I \end{vmatrix}$ כמו-דטרמיננטה בעמודות B — דומה) //

ג. פרטים להוכחה שהפו' $f(A) = |AB|$ היא כמו-דטרמיננטה:

תזכורת: אם $A = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ כאשר $v_1, \dots, v_n \in F^{1\times n}$ (וקטורי שורה), אז

$$AB = \begin{pmatrix} v_1 B \\ \vdots \\ v_n B \end{pmatrix}$$ = שורות המטריצה ("כפל שורה-שורה"). לכן:

1. אם ב A שתי שורות שוות ($v_i = v_j$, $i \neq j$), אז ב AB שתי שורות שוות ($v_i B = v_j B$), ולכן $f(A) = |AB| = 0$.

2. אם נחליף ב- A שורות i, j ($i \neq j$), אז ב AB יתחלפו השורות i, j (שהן $v_i B, v_j B$) גם כן, ולכן הסימן של $|AB|$ יתהפך.

3. לינאריות בכל שורה i:

$$f\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \cancel{v_i}\ \alpha u + \beta v \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \overset{\text{הג'}}{=} \left| \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \alpha u + \beta v \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} B \right| = \begin{vmatrix} v_1 B \\ \vdots \\ (\alpha u + \beta v) B \\ \vdots \\ v_n B \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} v_1 B \\ \vdots \\ \alpha u B + \beta v B \\ \vdots \\ v_n B \end{vmatrix} \underset{\uparrow}{=} \alpha \begin{vmatrix} v_1 B \\ \vdots \\ u B \\ \vdots \\ v_n B \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} v_1 B \\ \vdots \\ v B \\ \vdots \\ v_n B \end{vmatrix} =$$

לינ' הדטרמיננטה בשורה i

$$= \alpha \left| \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ u \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} B \right| + \beta \left| \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} B \right| = \alpha f\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ u \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \beta f\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}. //$$

3. הוכחת המסקנות מטעל השיעור:

~~($AB=I$ אם"ם יש B כך ש $\Leftarrow$ הפיכה A .1)~~

1. אם A הפיכה, אז $AA^{-1}=I$, לכן $|A|\cdot|A^{-1}|=|AA^{-1}|=|I|=1$. בפרט, $|A|\neq 0$.
אם A <u>אינה</u> הפיכה, אז שורותיה תלויות לינארית, ולכן יש שורה שעל ידי הוספת כפולות סקלריות של שורות אחרות אליה, נאפס אותה. כיוון שפעולות כאלה אינן משנות דטרמיננטה, $|A|$ שווה לדטרמיננטה של מט' עם שורת אפסים, שהיא 0.
לכן, A הפיכה $\Leftrightarrow$ $|A|\neq 0$.

2. אם A הפיכה, אז $1=|I|=|AA^{-1}|=|A|\cdot|A^{-1}|$, לכן $|A^{-1}|=|A|^{-1}$.

3. עבור k טבעי, $|A^k|=|A|^k$: ודאי נכון עבור $k=1$, ובאינדוקציה עבור $k>1$:
$$|A^k|=|AA^{k-1}|=|A|\cdot|A^{k-1}| \underset{\text{ה"א}}{=} |A|\cdot|A|^{k-1}=|A|^k.$$

4. אם A הפיכה ו-k <u>שלם</u>, ומגדירים $A^0=I$, $A^m=(A^{-m})^{-1}$ כאשר m שלילי,
אז: $|A^k|=|A|^k$: (3) מוכיח עבור $k>0$.
$k=0$: $|A^0|=|I|=1=|A|^0$ (כאן צריך גם להגדיר $x^0=1$, למרות שזה לא רציני...).
$k<0$: נסמן $p=-k>0$.
$$|A^k|=|(A^p)^{-1}| \underset{(2)}{=} |A^p|^{-1} \underset{(3)}{=} (|A|^p)^{-1}=|A|^{-p}=|A|^k.$$

5. המכפלה $A_1\cdots A_k$ הפיכה $\Leftrightarrow$ $A_1,\dots,A_k$ כולן הפיכות:

מ-(1), ~~מתקיים~~ $A_1\cdots A_k$ הפיכה $\Leftrightarrow$ $|A_1\cdots A_k|\neq 0$ = $|A_1|\cdots|A_k|$ $\Leftrightarrow$ $|A_1|,\dots,|A_k|\neq 0$
$\underset{(1)}{\Updownarrow}$
$A_1,\dots,A_k$ הפיכות. //