פיתרון תרגיל בית 5 במתמטיקה בדידה 2

15 במאי 2018

1. הוכיחו שבקבוצה של n אנשים יש לפחות שני אנשים המכירים את אותו מספר אנשים. (הערה: לצורך השאלה נניח שהכרות זהו יחס סימטרי ורפלקסיבי: פלוני מכיר את אלמוני אמ"ם אלמוני מכיר את פלוני, ובנוסף כל אחד מכיר את עצמו.)

__פתרון:__

האפשרויות למספר האנשים שאדם מסויים מכיר הן מהקבוצה $\{1, 2, \ldots, n\}$. נשים לב שאם מישהו מכיר n אנשים, ז"א שהוא מכיר את כולם ולכן כולם מכירים אותו, ובנוסף לזה שהם מכירים את עצמם כל אחד מכיר לפחות שני אנשים. לכן אין אף אחד שמכיר רק את עצמו. לכן האפשרויות למספר האנשים שאדם מכיר שייכות לאחת מבין שתי הקבוצות הבאות: $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ או $\{2, 3, \ldots, n\}$. בכל מקרה יש לכל היותר $n-1$ אפשרויות, ויש n אנשים. לפי שובך היונים יש לפחות שני אנשים שמכירים את אותו מספר אנשים.

2. מספר התלמידים בכיתה הוא 34. ציון של תלמיד הוא מספר טבעי בין אפס לבין מאה, כולל. מצאו כמה אפשרויות יש להעניק ציון לתלמידים כך שהציון הממוצע בכיתה יהיה 87. (רמז: מה צריך להיות סכום הציונים?)

__פתרון:__

ישנם 34 סטודנטים. נסמן ב x_i את הציון שקיבל סטודנט i (כאשר $1 \le i \le 34$). כיוון שהממוצע הוא 87 מתקיים כי

$$\frac{\sum_{i=1}^{34} x_i}{34} = 87$$

כאשר $0 \le x_i \le 100$ לכל i. המשוואה שקולה לכך שמתקיים כי $\sum_{i=1}^{34} x_i = 2958 = 87 \cdot 34$. נגדיר את הקבוצות הבאות:

U מספר האפשרויות לפתור את המשוואה כאשר יש רק את האילוצים $0 \le x_i$ ללא האילוצים הנוספים $x_i \le 100$.

לכל i נגדיר את A_i להיות קבוצת האפשרויות לפתור את המשוואה כאשר $x_i \ge 101$ ואין אילוצים על המשתנים האחרים (כלומר לכל j ששונה מ i יתכן כי $x_j \le 100$).

מסקנה: הקבוצה $A_i \cap A_j$ מכילה את האפשרויות לפתור את המשוואה כאשר $x_i \ge 101 \wedge x_j \ge 101$.

וכך הלאה לגבי שאר האפשרויות לחיתוכים של קבוצות.

כעת, נחשב את הגדלים של הקבוצות (והחיתוכים שלהן...):

כיוון שבקבוצה U אין שום אילוץ על x_i-ים, אז זאת פשוט הנוסחה של מנייה בלי סדר ועם חזרה, ונקבל $|U| = \binom{34+2958-1}{34-1}$.

לכל i, עבור חישוב A_i, סטודנט i קיבל לפחות 101 נקודות, כלומר קיים האילוץ $x_i \geq 101$. נשים לב שבמקום המשוואה

$$\sum_{i=1}^{34} x_i = 2958$$

עם האילוצים $x_i \geq 101$ ולכל $j \neq i$ $x_j \geq 0$, אפשר להסתכל על המשוואה

$$\sum_{i=1}^{34} x_i = 2958 - 101$$

עם האילוצים $x_j \geq 0$ לכל j.

ולכן הגודל של A_i הוא $|A_i| = \binom{34+2859-1}{34-1}$.

באופן דומה עבור $A_i \cap A_j$ ניתן לחשוב על המשוואה

$$\sum_{i=1}^{34} x_i = 2958 - 202$$

עם האילוצים $x_j \geq 0$ לכל j. ובאופן דומה נקבל כי $|A_i \cap A_j| = \binom{34+2756-1}{34-1}$.

ניתן לראות עקביות: עד לחיתוך של $2958/101 = 29$ (מעוגל למטה) של קבוצות (לא יכול להיות ש־30 ומעלה תלמידים קיבלו מעל 100, השאר קיבלו ציון לא שלילי והממוצע 87, ולכן עוצמת החיתוך של 30 ומעלה קבוצות היא 0 ולא תורמת בנוסחת ההכלה והדחה כלום).

כעת נוכל לחשב את גודל הקבוצה

$$\bigcap_{i=1}^{34} A_i^c$$

כי זאת בדיוק קבוצת כל הפתרונות למשוואה כך שלכל i מתקיים $x_i \leq 100$ ביחד עם התנאי שחוזר בכל הקבוצות של $0 \leq x_i$, וזהו הגודל המבוקש בשאלה. נחשב אותו בעזרת הכלה־הדחה. מתקיים

$$\bigcap_{i=1}^{34} A_i^c = \left(\bigcup_{i=1}^{34} A_i\right)^c = U \setminus \bigcup_{i=1}^{34} A_i$$

ולכן הגודל המבוקש הוא $|U| - \left|\cup_{i=1}^{34} A_i\right|$ נחשב בעזרת נוסחת להכלה־הדחה

$$\begin{aligned}
|U| - \left|\cup_{i=1}^{34} A_i\right| &= |U| - \sum_{i=1}^{34} |A_i| + \sum_{i,j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i,j,k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots \\
&= \binom{34}{0}|U| - \binom{34}{1}|A_i| + \binom{34}{2}|A_i \cap A_j| - \binom{34}{3}|A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots
\end{aligned}$$

ונקבל בסופו של דבר:

$$\sum_{i=0}^{29} (-1)^i \cdot \binom{34}{i} \cdot \binom{34 + 2958 - i \cdot 101 - 1}{34 - 1}$$

3. n אנשים נכנסים למסעדה. לכל אחד מהם מעיל ועניבה. בסיום הארוחה הם ממהרים לעזוב וכל אחד מהם לוקח מעיל ועניבה כלשהם. מה מספר האפשרויות שבהן אף אחד מהם לא יקבל בחזרה הן את מעילו והן את עניבתו (ייתכן שמישהו יקבל את המעיל או העניבה, אך לא את שניהם)?

<u>פתרון:</u>

נקרא לבחירה אקראית של מעיל ועניבה "ערבוב". נסמן כמה קבוצות שתהיינה הרכיבים הדרושים להוכחה:

A_i תהיה קבוצת האפשרויות שלקוח i יקבל את העניבה שלו והמעיל שלו.

נשים לב שאחרי שקבענו לאן הולך כובע ועניבה אחת בחירת השאר היא ערבוב של העניבות והמעילים ולכן $|A_i| = ((n-1)!)^2$.

U תהיה קבוצת האפשרויות לקבלת מעיל ועניבה (קבוצה אוניברסלית).

נשים לב שכל אפשרות היא בעצם ערבוב של העניבות ושל המעילים ולכן $|U| = (n!)^2$.

$A_i \cap A_j$ קבוצת האפשרויות שלקוחות j, i יקבלו, כל אחד, את העניבה שלו והמעיל שלו.

קבענו שתי עניבות ושני מעילים, ונותר לקבוע את השאר. זה בעצם ערבוב של העניבות והמעילים של השאר, כלומר: $|A_i \cap A_j| = ((n-2)!)^2$.

באופן דומה, נבדוק מה גודלה של קבוצת האפשרויות ש־k לקוחות ספציפיים יקבלו את העניבה והמעיל שלהם.

קבענו k עניבות ו־k מעילים, ונותר לקבוע את השאר. זה בעצם ערבוב של עניבות ומעילים של השאר, כלומר: $((n-k)!)^2$.

רוצים שאף אחד לא יקבל גם מעיל וגם עניבה ולכן לסיכום בעזרת עקרון ההכלה־הדחה נקבל:

$$\begin{aligned}
\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right| &= \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c\right| = |U| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| \\
&= |U| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| - \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots \\
&= \binom{n}{0}\cdot(n!)^2 - \binom{n}{1}\cdot((n-1)!)^2 + \binom{n}{2}\cdot((n-2)!)^2 - \binom{n}{3}\cdot((n-3)!)^2 + \dots + (-1)^k\binom{n}{k}((n-k)!)^2 + \dots \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}\cdot((n-i)!)^2
\end{aligned}$$

4. האם קיים גרף שדרגות קודקודיו הן: (אם כן ־ ציירו אותו, אם לא ־ הוכיחו שלא קיים!)

א. $5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5$?

ב. $1, 2, 2, 3, 4, 5$?

ג. 1,1,2,3,4,5?

<u>פתרון:</u>

א. כן, מתומן שכל קודקוד מחובר לשני הקרובים אליו משני הצדדים, ולנגדי שלו (שביניהם שלושה קודקודים משני הצדדים).

ב. לא, סך דרגות הקודקודים יוצא אי־זוגי בסתירה ללמת לחיצת הידיים.

ג. כאן למת לחיצת הידיים "עוברת", אבל נשים לב שיש לנו קודקוד מדרגה 5, לכן שולח קשת לכל אחד. נסיר את הקודקוד הזה וחמשת צלעותיו ונקבל גרף עם חמשה קודקודים והדרגות הבאות: $0, 0, 1, 2, 3$, האחרון מדרגה 3 אבל יש לו רק שני קודקודים אליהם הוא יכול להישלח בסתירה.