תרגיל תיאורטי מספר 3

1. תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ויהיו v ו"ע המשויך ל λ ע"ע (כלומר $Av = \lambda v$) .

   (א) הוכיחו כי לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים כי v ו"ע של A^k המתאים לע"ע λ^k.(אפשר באינדוקציה. התחילו לקבל תחושה עם המקרים של $k = 2, 3$).

   (ב) הוכיחו כי לכל פולינום $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ מתקיים כי v ו"ע של $p(A)$ המתאים לע"ע $p(\lambda)$.

2. תהא $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ לכסינה. הוכיחו כי $A^2 + 3I$ לכסינה והפיכה.

3. תהא $A \in \mathbb{R}^{9\times 9}$ עם דרגה = 5. נתון כי $rank(A - 3I) = 5$. עוד נתון כי ל A קיים ע"ע ששוה ל - 5 . הוכיחו כי A לכסינה מעל $\mathbb{R}$ ומצא את האלכסונית ש A דומה לה.

4.

   (א) תהא $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ כך שכל שורה של A מסתכמת לאותו מספר שנסמנו λ. הוכיחו כי λ ע"ע של A.
   למשל למטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \\ 8 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ יש ערך עצמי 6 כי כל שורה מסתכמת ל 6.
   רמז: חישבו מי הו"ע המתאים.

   (ב) תהא $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. לכסנו או"ג את A. כלומר מצאו מטריצה P או"ג ומטריצה אלכסונית D כך ש $P^{-1}AP = D$

5. נגדיר סדרת מספרים בצורה רקורסיבית:

$$\begin{aligned} a_{-1} &= -1 \\ a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \\ \forall n \geq 2 \ a_n &= -2a_{n-1} + a_{n-2} + 2a_{n-3} \end{aligned}$$

(א) הגדירו A המקיימת $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{pmatrix}$ לכל $n \geq 2$.

(ב) לכסנו את A כדי למצוא ביטוי מפורש ל a_n (עבור $n \geq 2$). הדרכה: שימו לב כי $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \\ a_{-1} \end{pmatrix}$ לכל $n \geq 2$.