

בס"ד

אוניברסיטת בר-אילן  
מבחן בקורס: אלגברה מופשטת 1 (סמסטר קיץ)  
מספרי הקורס: 8821105 + 8821108  
המרצים: מיכאל מגרל, רוני ביתן  
המתרגלים: תומר באואר, עופר בוסאני, שירה גילת  
תאריך: כ"ג אלול תשע"ד, 18.09.14 מועד א'  
חומר עזר: רק מחשבון רגיל  
משך המבחן: שעתיים וחצי

יש לפתור בדיוק 4 מתוך 5 שאלות (כל שאלה שווה 24 נקודות והציון מתחיל ב-4)  
בנוסף יש גם שאלת בונוס השווה 5 נקודות.  
בדר"כ אין קשר תוכני בין סעיפים שונים של אותה השאלה.  
יש לנמק היטב את כל התשובות.

### השאלות:

**שאלה 1:** כתוב ונמק בקצרה לגבי כל אחת מהטענות הבאות האם היא נכונה או לא:

- דרגת החבורה  $\mathbb{Z}_{200} \times \mathbb{Z}_{100} \times \mathbb{Z}_3$  היא 2.
- קיים איזומורפיזם:  $U_{14} \cong U_{18}$ .
- קיים מונומורפיזם:  $\mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}$ .
- תיתכן פעולה הומוגנית של חבורת  $p$  ( $p$  מס' ראשוני) על קבוצה בת  $p+1$  איברים.

**שאלה 2:** תהא  $G$  הקבוצה:  $\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y \in F, x \neq 0 \right\}$  עם פעולת מכפלת מטריצות,

באשר  $F$  הוא שדה כלשהו.

- הראה כי  $G$  חבורה.
- הראה כי  $G$  פתירה.
- בהינתן  $F = \mathbb{Z}_3$ , מהי הדרגה של  $G$ ?

### שאלה 3:

- צטט והוכח את משפט Cayley.
- תן דוגמה מפורשת לכל אחד מן המונומורפיזמים הבאים:
  - $\mathbb{Z}_{2014} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$
  - $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow A_4$

**שאלה 4:**

- א. הראה כי בחבורה  $G$ :  $o(gh) = o(hg)$   $\forall g, h \in G$ .
- ב. הראה שכל שני איברים צמודים בחבורה סופית הם בעלי אותו הסדר.
- ג. תהא חבורה  $G$  ונניח של- $g \in G$  יש בדיוק שני איברים צמודים שונים, כולל  $g$  עצמו. הוכח כי  $G$  אינה פשוטה.

**שאלה 5:**

- א. צטט והוכח את משפט סילו 3.
- ב. הראה כי בחבורה החופשית עם שני יוצרים  $F_2 = F(x, y)$  קיימת תח"נ  $H$  כך ש:  
$$F_2/H \cong S_{2014}$$

**שאלת בonus:**

- הראה שכל חבורת Heisenberg  $\mathbb{H}(F)$  מעל שדה  $F$  כלשהו היא מכפלה חצי ישרה של שתי ת"ח אבליות.

**בהצלחה ושנה טובה!**

