

פתרון תרגיל 5 – מופשטת 1 קיץ 2014

שאלה 1

תזכורת: נאמר שחבורה G היא מכפלה ישרה פנימית של ת"ח $X, Y \leq G$ אם:

א. לכל $g \in G$ קיימים $x \in X, y \in Y$ יחידים כך ש- $g = xy$;

ב. לכל $x \in X, y \in Y$ $xy = yx$.

תהא G מכפלה ישרה פנימית של H_1, H_2 ותהא $N \triangleleft G$ תח"נ המקיימת $N \cap H_1 = N \cap H_2 = \{e\}$. הוכיחו: $N \subseteq Z(G)$.

פתרון

טענת עזר: יהיו $N, H \triangleleft G$ תח"נ המקיימות $N \cap H = \{e\}$. אזי כל איברי H מתחלפים עם כל איברי N .

הוכחת טענת עזר: קודם כל, הטענה נובעת ישירות ממשפט הפיצול. שנית, ניתן להוכיח זאת ישירות: נשים לב שהטענה שקולה לכך שלכל $n \in N, h \in H$ מתקיים $nhn^{-1}h^{-1} = \{e\}$. מתקיים $nhn^{-1}h^{-1} = n(hn^{-1}h^{-1}) \in N$ (מכיוון ש- $N \triangleleft G$) ומכיוון ש- $nhn^{-1}h^{-1} = n(hn^{-1}h^{-1}) \in H$ (מכיוון ש- H היא תח"נ) ולכן $nhn^{-1}h^{-1} = n(hn^{-1}h^{-1}) \in N \cap H$. לכן $nhn^{-1}h^{-1} = (nhn^{-1})h^{-1} \in H$ והוכחנו הדרוש.

מש"ל טענת עזר

בחזרה לתרגיל

יהי $n \in N$ ונרצה להראות ש- $n \in Z(G)$, כלומר, לכל $g \in G$ מתקיים $ng = gn$ (או, באופן שקול, $ngn^{-1}g^{-1} = e$).

מכיוון ש- G היא מכפלה ישרה פנימית של H_1, H_2 קיימים (ויחידים) $g = h_1h_2$ כך ש- $h_1 \in H_1, h_2 \in H_2$.

מתקיים: $ngn^{-1}g^{-1} = nh_1h_2n^{-1}h_2^{-1}h_1^{-1}$. מכיוון שכל איברי H_1 מתחלפים עם כל איברי H_2 , והם כולם מתחלפים עם כל איברי N מתקיים: $ngn^{-1}g^{-1} = h_1nh_2n^{-1}h_2^{-1}h_1^{-1} = h_1h_2nn^{-1}h_2^{-1}h_1^{-1} = h_1h_2h_2^{-1}h_1^{-1} = \dots = e$. כדרוש.

מש"ל

שאלה 2

- א. נתונות שש חבורות מסדר 40. זהו אילו חבורות איזומורפיות זו לזו:
 $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$, $U_{10} \times \mathbb{Z}_{10}$, \mathbb{Z}_{40}
- ב. מצאו איזומורפיזם מפורש מהחבורה $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_2$ אל החבורה $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{10}$.

פתרון

א. $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{40}$ שכן $(8,5)=1$. האקספוננט של חבורה זו הוא 40.

$U_{10} = \{1, 3, 7, 9\} \cong \mathbb{Z}_4$ (בדקו ש U_{10} ציקלית) וכמו כן $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_{10}$ ולכן
 $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10} \cong U_{10} \times \mathbb{Z}_{10}$. האקספוננט של החבורה הזו הוא 20.

לבסוף האקספוננט של $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ הוא 10. לכן קיבלנו בסה"כ שלוש חבורות שאינן איזומורפיות.

דרך אחרת- מעבירים לצורה הקנונית שהיא יחידה עד כדי איזומורפיזם.

הצורה הקנונית הראשונה היא \mathbb{Z}_{40} , השניה היא $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{20}$. שימו לב:

$$\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{20}$$

השלישית היא $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{10}$.

ב. נמצא שני איזומורפיזמים $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{h_1} \mathbb{Z}_{30} \xrightarrow{h_2} \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{10}$ ואז

האיזומורפיזם הדרוש הוא ההרכבה $h_2 \circ h_1$. מתקיים: $h_1(x, y) = -7x + y$

שכן מתקיים $1 = 1 \cdot 15 + (-7) \cdot 2$. כמו כן, $h_2(z) = (z \bmod 3, z \bmod 10)$.

מש"ל

שאלה 3

האם קיימת חבורה אבלית G , כך ש- $\exp(G) = 4$, $|G| = 32$, ו- $[G : G^2] = 4$?

הערה: הסימון G^2 בחבורה אבלית הוא למעשה (בכתיב חיבורי)

$$2G = \{2g : g \in G\}$$

פתרון

$\exp(G) = 4$, $|G| = 32$ ומכאן G איזומורפית ל- $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$ או ל-

$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$. מתקיים:

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 / 2(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4) \cong \mathbb{Z}_2 / 2\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 / 2\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 / 2\mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$$

והסדר המתקבל הוא שמונה.

$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 / 2(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
 וסדר החבורה הוא 16. בכל מקרה לא מקבלים $[G:G^2]=4$ ולכן אין חבורה כזו.

שימו לב שמבלי לעבור למנה, יכולנו לחשב את הסדרים ישירות. למשל, במקרה הראשון: הסדר של החבורה $2(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4)$ הוא 4, ולכן $[G:2G]=8$ בסתירה לנתון.

מש"ל

שאלה 4

- א.** כמה מחלקות צמידות יש בחבורה S_6 ?
ב. תהא $G = S_4$ הפועלת על הקבוצה $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ע"י $g * x = g(x)$. חשבו את המייצב של $x=2$. האם המייצב של $x=2$ הוא ת"ח נורמלית של G ? נמקו.

פתרון

- א.** כפי שראינו מחלקות הצמידות ב- S_n הן קבוצות המכילות את כל התמורות בעלות אותו מבנה מחזורים. לכן מספיק לספור כמה מבני מחזורים יש. תשובה: 11.
ב. המייצב של $x=2$ הוא התמורות שלא מזיזות את 2, כלומר: $A = \{id, (13), (14), (34), (134), (143)\}$. למשל, $(12)(13)(12) = (23) \notin A$.

מש"ל

שאלה 5

- א.** חשבו את aba^{-1} עבור: $(1) a = (1\ 3\ 5)(1\ 2)$ ו- $b = (1\ 5\ 7\ 9)$.
 $(2) a = (1\ 3\ 8)$ ו- $b = (1\ 8\ 3\ 9)$.
ב. מצאו גודל של מחלקת צמידות $[\beta] = \{g^{-1}\beta g : g \in S_{15}\}$ של האיבר $\beta = (3, 2, 6, 9)$ ואת סדר המייצב של β (תחת הצמדה).
ג. תהי $H \leq S_9$ תת חבורה הנוצרת על ידי $(123)(789)$ ו- (345) . בניח ש- H פועלת (הפעולה הטבעית) על $X = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$. כמה מסלולים יש לפעולה זו ומהו סדרם של מסלולים אלו?

פתרון

א.

$$; aba^{-1} = (a(1)a(5)a(7)a(9)) = (2179) \quad (1)$$

$$. aba^{-1} = (3189) \text{ , באותו האופן,} \quad (2)$$

ב. הערה לגבי סימונים: $(orb(a) = G * a$

למעשה אנו מתבוננים בפעולה של S_{15} על עצמה ע"י הצמדה. גודל מסלול ההצמדה של β הוא מספר האיברים בחבורה אשר צמודים לה; משמע, מספר

$$\text{המחזורים מאורך 4. מתקיים: } |S_{15} * \beta| = |conj(\beta)| = \binom{15}{4} (4-1)! = 8190.$$

את סדר המייצב ניתן לחשב מהמשפט: $|G * x| = [G : Stb(x)]$. מקבלים:

$$. |Stb(\beta)| = \frac{15!}{8190} = 159,667,200$$

הערה: שימו לב ש- $Stb(\beta)$ הוא המייצב של β ביחס לפעולת ההצמדה; כלומר,

$$. Stb(\beta) = C_\beta$$

ג. קל לראות שקיימים שלושה מסלולים: האחד $\{1,2,3,4,5\}$ מגודל 5, השני

$\{6\}$ מגודל 1 והשלישי $\{7,8,9\}$ מגודל 3. הסבר: מהגדרת H נובע שלכל

$\sigma \in H$ $\sigma(6) = 6$ לכן $orb(6) = \{6\}$. התמורה $(345) \in H$ מעבירה את 3 ל 4 ואת

4 ל 5 ומכיון שהמסלולים הם מחלקות שקילות של X $3,4,5 \in orb(3)$. מכיון

שהתמורה $(123)(789) \in H$ נקבל ש גם $1,2 \in orb(3)$. משיקולים דומים

$7,8,9 \in orb(7)$. לבסוף שימו לב שמהגדרת H אף תמורה ב H לא מעבירה

איבר מ $\{1,2,3,4,5\}$ לאיבר בקבוצה $\{7,8,9\}$ (מדוע?). מכך נסיק שהמסלולים

הינם כפי שצויינו.

מש"ל

שאלה 6

תזכורת: עבור $H \leq G$ נגדיר את המנרמל (או הנורמליזטור) של H ב- G :

$$. N(H) := \{g \in G : gH = Hg\}$$

הוכיחו:

א. $N(H) \leq G \Leftrightarrow H \triangleleft G$ ו- $N(H) = G$;

ב. $H \triangleleft N(H)$;

ג. אם $H \triangleleft K \leq G$ אזי $K \leq N(H)$.

פתרון

א. $N(H) \leq G \Leftrightarrow H \triangleleft G$ ו- $N(H) = G$.

נוכיח תחילה כי $N(H) \leq G$. ברור ש- $N(H)$ אינה ריקה, שכן $1_G \in N(H)$. יהיו $a, b \in N(H)$. מתקיים: $(ab)H = a(bH) = a(Hb) = (aH)b = (Ha)b = H(ab)$ ולכן $ab \in N(H)$. כעת, יהי $a \in N(H)$. מתקיים: $(a^{-1})H = (aH)^{-1} = (Ha)^{-1} = H(a^{-1})$ ולכן $a^{-1} \in N(H)$.

נוכיח כעת את הטענה $H \triangleleft G \Leftrightarrow N(H) = G$. הכיוון הראשון טריוויאלי (שכן, אם $H \triangleleft G$ אזי $gH = Hg$ לכל $g \in G$). הכיוון השני טריוויאלי מהגדרת ת"ח נורמלית.

ב. $H \triangleleft N(H)$.

רואים מההגדרה כי $H \subseteq N(H)$ ולכן היא ת"ח. נותר להראות שהיא נורמלית.

קל לראות שלכל $a \in N(H)$ ולכל $h \in H$ מתקיים $aha^{-1} \in H$.

ג. אם $H \triangleleft K \leq G$ אזי $K \leq N(H)$.

מספיק להראות ש- K מוכלת ב- $N(H)$ (מדוע?). $H \triangleleft K$ ולכן לכל $k \in K$ מתקיים $kHk^{-1} = H$, ומהגדרת המנרמל רואים כי $k \in N(H)$. לכן, $K \subseteq N(H)$.

מש"ל

שאלה 7

השתמשו במשפט קיילי על מנת להציג את U_9 כתת חבורה של S_6 .

פתרון

$U_9 = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$. כעת, מכיון ש U_9 ציקלית מספיק להראות מה התמונה σ של היוצר 2 ב $S_{\{1,2,4,5,7,8\}} \cong S_6$. נעשה זאת לפי האלגוריתם בהוכחת משפט קיילי, שכן אז תמונות כל שאר האיברים יקבעו בשל הציקליות. כזכור 2

אמור להיות מועתק ל σ כאשר $\sigma(x) = 2 \cdot x \quad \forall x \in U_9$ 1 כפל ב- U_9 . נקבל $\sigma = (124875) \in S_{\{1,2,4,5,7,8\}}$ לכן $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 4, \sigma(4) = 8, \sigma(8) = 7, \sigma(7) = 5$.

מש"ל