תרגיל 2 – אנליזה מודרנית

תזכורת: קבוצה E הינה מדידה לבג אם מתקיים

$$m*(A)=m*(A\cap E)+m*(A\cap E^c)\quad \forall A\subseteq \mathbb{R}$$

תרגיל: תהיינה $E_1,E_2\subseteq \mathbb{R}$ קבוצות מדידות לבג, הוכיחו:

$$m^*(E_1\cup E_2)+m^*(E_1\cap E_2)=m^*(E_1)+m^*(E_2)$$

פתרון: בגלל המדידות של $E_{1,2}$ נקבל שגם $E_1\cup E_2, E_1\cap E_2, E_1-E_2, E_2-E_1$ מדידות.

ע"פ המדידות של הקבוצות נקבל:

$$(1)\ m^*(E_1)=m^*(E_1-E_2)+m^*(E_1\cap E_2)$$

$$(2)\ m^*(E_2)=m^*(E_2-E_1)+m^*(E_1\cap E_2)$$

$$m^*(E_1\cup E_2)=m^*((E_1\cup E_2)\cap E_1)+m^*((E_1\cup E_2)-E_1)=m^*(E_1)+m^*(E_2-E_1)$$

נציב את (1) ונקבל

$$(3)\ m^*(E_1\cup E_2)=m^*(E_1\cap E_2)+m^*(E_1-E_2)+m^*(E_2-E_1)$$

נחבר את (1) ואת (2) ונקבל

$$m^*(E_1)+m^*(E_2)=m^*(E_1-E_2)+m^*(E_2-E_1)+m^*(E_1\cap E_2)+m^*(E_1\cap E_2)$$

נציב את (3) ונקבל

$$m^*(E_1)+m^*(E_2)=m^*(E_1\cup E_2)+m^*(E_1\cap E_2)$$

מש"ל.

תרגיל: תהי E קבוצה מדידה לבג, $a,b\in\mathbb{R}$ קבועים, הוכיחו כי הקבוצה $aE+b$ מדידה גם היא.

פתרון: ראינו בהרצאה שהזזות שומרת על מדידות, ולכן נניח בה"כ $b=0$. נחלק לשני מקרים:

<u>$a=0$</u>: במקרה זה הקבוצה $aE=\{0\}$ היא נקודון, ובוודאי מדידה.

<u>$a\neq 0$</u>: נוכיח שתי טענות עזר, לכל $A,B\subseteq\mathbb{R}$ ולכל $a\in\mathbb{R}$:

א. $(aA)^c = aA^c$

ב. $a(A\cap B) = (aA)\cap(aB)$

<u>**הוכחה:**</u>

א.

$$x\in(aA)^c \Leftrightarrow x\notin aA \Leftrightarrow \frac{x}{a}\notin A \Leftrightarrow \frac{x}{a}\in A^c \Leftrightarrow x\in aA^c$$

ב.

$$x\in a(A\cap B)\Leftrightarrow \frac{x}{a}\in A\cap B \Leftrightarrow \frac{x}{a}\in A \& \frac{x}{a}\in B \Leftrightarrow x\in aA \& x\in aB \Leftrightarrow x\in (aA)\cap(aB)$$

המדידות של E נותנת $m^*(A) = m^*(A\cap E) + m^*(A\cap E^c)$ לכל $A\subseteq\mathbb{R}$. נכפול שוויון זה ב $|a|$

$$|a|m^*(A) = |a|m^*(A\cap E) + |a|m^*(A\cap E^c)$$

$$m^*(aA) = m^*(a(A\cap E)) + m^*(a(A\cap E^c))$$

$$m^*(aA) = m^*(aA\cap aE) + m^*(aA\cap(aE)^c)$$

$B = aA$ תהיה גם תת-קבוצה כללית של $\mathbb{R}$, ונקבל את הדרוש.

<u>**הגדרה:**</u> נסמן $C_0 = [0,1]$, ולכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר את C_{n+1} להיות C_n לאחר שמורידים מכל קטע בו את השליש האמצעי (הפתוח) ע"י הנוסחה $C_{n+1} = \frac{C_n}{3}\cup\left(\frac{C_n}{3}+\frac{2}{3}\right)$. קבוצת קנטור מוגדרת כחיתוך של כל ה- C_n : $C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. (כל C_n הוא איחוד של 2^n קטעים סגורים שאורכם $\frac{1}{3^n}$.

[לצייר ציור!]

<u>תכונות:</u>

א. C קומפקטית.

ב. יהי $x\in[0,1]$, אם נציג את x בבסיס טרנארי (3) $x = 0.x_1x_2x_3...$ (כלומר $x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{3^n}$) אזי נקבל כי $x\in C \Leftrightarrow$ לכל $n\in\mathbb{N}$, הספרה ה-nית של x $x_n \equiv d_n(x)\equiv x$ היא 0 או 2.

ג. C אינה בת-מנייה.

ד. $m(C)=0$

ה. C לא מכילה שום קטע (בעל מידה חיובית)

ו. C אינה איחוד בן-מנייה של קטעים סגורים.

<u>הוכחה:</u>

א. מכיוון ש C_n הינה איחוד סופי של קטעים סגורים נקבל כי C_n קבוצה סגורה לכל $n \in \mathbb{N}$.
מכאן שקבוצת קנטור $C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ הינה סגורה כחיתוך של קבוצות סגורות. מכיוון ש
$C \subset [0,1]$ אזי היא חסומה ועפ"י היינה בורל הינה קומפקטית.

ב. נוכיח $x \in C_n \Leftrightarrow x_1, x_2, ..., x_n \in \{0,2\}$ באינדוקציה:

המקרה $n=1$:

$$x \in C_1 \Leftrightarrow x \in \left[0,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},1\right] \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ or } x_1 = 2 \Leftrightarrow x_1 \in \{0,2\}$$

נניח את נכונות הטענה עבור n כלשהו ונוכיח את נכונותה עבור $n+1$:

$(\Rightarrow)$

$$x \in C_{n+1} = \frac{C_n}{3} \cup \left(\frac{C_n}{3}+\frac{2}{3}\right) \Rightarrow x \in \frac{C_n}{3} \text{ or } x \in \left(\frac{C_n}{3}+\frac{2}{3}\right) \Rightarrow 3x \in C_n \text{ or } 3x-2 \in C_n$$

ע"פ הנחת האינדוקציה, $d_n(3x) \in \{0,2\}$ או $d_n(3x-2) \in \{0,2\}$. אבל -
$d_n(3x-2) = d_n(3x) = d_{n+1}(x) = x_{n+1}$. מספיק לשים לב כי $C_{n+1} \subseteq C_n$ כדי לראות
שהטענה נכונה.

$(\Leftarrow)$

ידוע כי $x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1} \in \{0,2\}$ ולכן ע"פ הנחת האינדוקציה $x \in C_n$. יש להוכיח כי
$x \in C_{n+1} = \frac{C_n}{3} \cup \left(\frac{C_n}{3}+\frac{2}{3}\right)$, כלומר $3x \in C_n$ או $3x-2 \in C_n$. ובכן:

אם $x_1 = 0$ נקבל $3x = 0.x_2x_3...x_nx_{n+1}... \in C_n$,

ואם $x_1 = 2$ נקבל $3x-2 = 0.x_2x_3...x_nx_{n+1}... \in C_n$.

סיימנו את האינדוקציה. סה"כ $x \in C \Leftrightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\left(x \in C_n\right) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\left(x_n \in \{0,2\}\right)$

מש"ל.

ג. נניח בשלילה כי C בת-מנייה. אזי $C = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. נניח שלכל x_n יש פיתוח טרנארי כנ"ל:

$x_1 = 0.x_1^{(1)}x_2^{(1)}x_3^{(1)}...$

$x_2 = 0.x_1^{(2)}x_2^{(2)}x_3^{(2)}...$

.

.

.

$x_i = 0.x_1^{(i)}x_2^{(i)}x_3^{(i)}...$

כאשר לכל i, j $x_j^{(i)} \in \{0,2\}$.

נגדיר מספר חדש $y = 0.y_1y_2y_3... \in C$ ע"י $y_i = \begin{cases} 2 & x_i^{(i)} = 0 \\ 0 & x_i^{(i)} = 2 \end{cases}$. קל לראות שהמספר הזה לא מופיע ברשימה הוא שונה מכל איבר בספרה מסוימת. קיבלנו סתירה, ולכן C איננה בת-מנייה.

הערה: אמנם ייצוג טרינארי אינו יחיד, אבל במקרה שלנו זה לא פוגע בהוכחה.

ד. לכל $N \in \mathbb{N}$, $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \subseteq C_N$ וע"פ מונוטוניות $0 \le m\left(C\right) \le m\left(C_N\right) = 2^N \frac{1}{3^N}$. נשאיף $N \to \infty$ לקבל את הדרוש.

ה. נניח בשלילה שקיים קטע $I \subseteq C$, עם מידה (אורך) $m\left(I\right) = \ell > 0$. עפ"י המונוטוניות נקבל בסתירה ש

$$m\left(I\right) \le m\left(C\right) = 0$$

ו. נניח בשלילה כי $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ כאשר I_n קטעים סגורים. אזי כבר ראינו כי $m\left(I_n\right) = 0$ ולכן בהכרח $I_n = \{x_n\}$, כלומר הקטעים הסגורים הינם נקודונים. אבל עפ"י סעיף ג' C איננה בת מנייה ומכאן סתירה.