אינפי 4 – תרגיל 1

1. הגדרנו שתי מסילות $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n,\ g:[c,d]\to\mathbb{R}^n$ להיות <u>שקולות</u> אם קיימת פונקציה מונוטונית עולה במובן הצר , רציפה ועל : $\varphi:[a,b]\to[c,d]$, כך שמתקיים $\forall s\in[a,b].\ g\big(\varphi(s)\big)=f(s)$. הראו כי היחס של "שקילות בין מסילות " כמו שהוגדר הינו סימטרי ,רפלקסיבי וטרנזיטיבי (כלומר – א.כל מסילה שקולה לעצמה, ב. אם מסילה f שקולה למסילה g אז g שקולה למסילה f ו-ג. אם מסילה f שקולה למסילה g , מסילה g שקולה למסילה h, אז מסילה f שקולה למסילה h) .

<u>פיתרון :</u>

*<u>רפלקסיביות</u> : פונקציית הזהות $\varphi:[a,b]\to[a,b],\varphi(t)=t$ היא עולה במובן הצר רציפה ועל וקיים : $f\big(\varphi(s)\big)=f(s)$.

*<u>סימטריות</u> : נניח קיים $f\big(\varphi(s)\big)=g(s)$ עבור $s\in[c,d]$ עבור פונקצייה φ מסויימת רציפה עולה במובן הצר ועל. משום כך יש לה פונקציה הפוכה $\psi=\varphi^{-1}$ שאף היא מונוטונית עולה צר, רציפה ועל הקטע המתאים, ונקבל לכן :

: $\forall t\in[a,b]{:}\ f\big(\varphi\big(\psi(t)\big)\big)=g\big(\psi(t)\big)$, אך $\varphi\big(\psi(t)\big)=t$ ומכאן:

$\forall t\in[a,b]{:}\ f(t)=g\big(\psi(t)\big)$, והראינו סימטריות .

*<u>טרנזיטיביות:</u> f שקולה ל- g ומכאן $\forall s\in[a,b]{:}\ f\big(\varphi(s)\big)=g(s)$ לפונקצייה φ מתאימה כנ"ל , ובנוסף g שקולה למסילה h לכן קיים : $\forall r\in[c,d]{:}\ g\big(\phi(r)\big)=h(r)$, לפונקציה ϕ מתאימה – ונקבל : $f\Big(\varphi\big(\phi(r)\big)\Big)=h(r)$ לכל $r\in[c,d]$, אך בתנאים שלנו $\varphi\circ\phi$ עולה ממש , רציפה ועל כהרכבת כאלו , ומכאן טרנזיטיביות !

---

2. ראינו כי עבור מסילה גזירה ברציפות למקוטעין $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, ניתן לחשב את אורכה על ידי : $L(\gamma)=\int_a^b\|\gamma'(t)\|\,dt$, (בנוסף להגדרת אורך של מסילה – באם קיים !) .

חשבו את אורך העקומה הנתונה על ידי : $\gamma(t)=\big(e^t,e^{-t},\sqrt{2}t\big),\ t\in[0,1]$.

<u>פתרון</u>

נחשב את $\|\gamma'(t)\|$: $\gamma'(t)=\big(e^t,-e^{-t},\sqrt{2}\big)$, ולכן :

$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{\left(e^{2t}+e^{-2t}+2\right)}=\sqrt{\left(e^t+e^{-t}\right)^2}=\left(e^t+e^{-t}\right)$, ומכאן מכיוון שהמסילה גזירה ברציפות נקבל :

$$L(\gamma)=\int_0^1\left(e^t+e^{-t}\right)dt=\left[e^t-e^{-t}\right]_0^1=\left(e-e^{-1}\right)-(1-1)=e-\frac{1}{e}$$

---

3. נגדיר : $f(x)=\begin{cases} x\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{x}\right), & 0<x\le 1 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$. כעת נגדיר מסילה :

$\gamma(t)=\left(t,f(t)\right), for\ t\in[0,1]$. האם מסילה זו היא בעלת אורך (סופי ...) ?

{הסתכלו על למשל , $f(\frac{1}{k})$ והפרידו ל- k זוגי ולאי זוגי ... } .

פתרון:

נשים לב כי קיים : $f\left(\frac{1}{k}\right)=\begin{cases} \frac{1}{k}, k\ is\ \ an\ even\ natural\ number \\ -\frac{1}{k}\ , k\ is\ an\ odd\ \ natural\ number \end{cases}$

ולכן: $\frac{1}{\mathrm{k}}\le\left|f\left(\frac{1}{k}\right)-f(\frac{1}{k+1})\right|\le\left\|\gamma\left(\frac{1}{\mathrm{k}}\right)-\gamma(\frac{1}{k+1})\right\|$, ואז אם נסתכל על חלוקה :

$T: 0<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}<\cdots<\frac{1}{2}<1$ ואז אורך הקו הפוליגונלי המתאים לחלוקה הזו יהיה גדול

מ- $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}\frac{1}{\mathrm{k}}$, שמתבדר לאינסוף כאשר $n\to\infty$. לכן המסילה **איננה** בעלת אורך .

4.תהי y=f(x) פונקציה רציפה על קטע [a,b] , גזירה בו ברציפות .

הוכיחו כי לגרף הפונקציה בקטע זה קיים אורך סופי שנתון על ידי :

$\int_a^{\mathrm{b}}\sqrt{1+(y(x)')^2}dx$. {רמז : איך ניתן להציג את גרף הפונקציה כמסילה ? ...) .

פתרון :

את גרף הפונקציה ("תמונת המסילה") ניתן להציג באמצעות הנוסחה :

$\gamma(x):=\left(x,f(x)\right), for\ x\in[a,b]$ מסילה זו גזירה ברציפות ולכן לפי נוסחת אורך מסילה ומכיוון שקיים $\gamma'(x)=(1,f'(x))$, נקבל את מה שצריך להוכיח!

5.הוכיחו כי עבור מסילה חלקה הנתונה בקואורדינטות קוטביות : $r=r(\theta)$, עבור $\theta_1\le\theta\le\theta_2$, ניתן להביע את אורכה על ידי : $L=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{r^2+(r')^2}d\theta$, וחשבו את אורך הקרדיואידה : $r=1+cos\theta\ , \theta\in[0,2\pi]$. {רמז : ייתכן שימוש בפונקיות טריגו' של זווית כפולה ...} .

פתרון:

נשתמש בהצגה הקוטבית ונשים לב כי המשתנה החופשי הוא הזווית בלבד :

$x = r(\theta)cos\theta\ , y = r(\theta)sinv$ ולכן נשתמש בנוסחת האורך עבור ההצגה הפרמטרית הזו לפי פרמטר הזווית ונקבל את נוסחת האורך בהצגה הקוטבית . עבור חישוב האורך בדוגמא הספציפית: $r = 1 + cos\theta$,

$$\mathrm{L} = \int_0^{2\pi} \sqrt{(r(\theta))^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1+cos\theta)^2 + (-sin\theta)^2} d\theta =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1+cos\theta}\, d\theta = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{cos^2(0.5\theta)} d\theta = 2\int_0^{2\pi} |\cos(0.5\theta)| d\theta$$

כאשר השתמשנו בזהות : $cos2x = 2cos^2x - 1$, ובזהות : $\sqrt{x} = |x|\ for\ all\ x!$.

כדי להוריד את הערך המוחלט באינטגרל האחרון נשים לב לסימן הקוסינוס ונפצל את תחום האינטגרציה לשני קטעים : $[0,\pi], [\pi, 2\pi]$ ונקבל תשובה סופית : **האורך הוא 8** .