דטרמיננטות

יישור קו:

1. דטרמיננטה היא כפלית. כלומר, $|AB| = |A||B|$ (מטריצות ריבועיות)
2. A הפיכה אמ"ם $|A| \neq 0$.
3. $|A| = |A^t|$
4. השפעה של פעולות שורה על דטרמיננטה- החלפת שורות זה הכפלה ב-1
הוצאת סקלר משורה, זה כמו להוציא את הסקלר מהדטרמיננטה.
הפעולה השלישית- לא משנה את הדטרמיננטה.
5. דטרמיננטה של מטריצה משולשית- כפל איברי האלכסון.
6. הדטרמיננטה היא לינארית בכל שורה, (ולכן גם בכל עמודה)

$$\det\begin{pmatrix} v_1 + v_1' \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

1. חשבו את הדטרמיננטה של

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

דרך א': פיתוח לפי שורה או עמודה.
נבחר את השורה השניה. (שיטת המינורים)
בוחרים שורה R_i של המטריצה.

$$|A| = (-1)^{i+1}A_{i,1}|M_{i,1}| + (-1)^{i+2}A_{i,2}|M_{i,2}| + ... + (-1)^{i+n}A_{i,n}|M_{i,n}|$$

מינור i, j זה המטריצה שמוחקים ממנה את השורה הi והעמודה הj.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(-1)^{2+1}1|\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}| + (-1)^{2+2}(-1)|\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}| + (-1)^{2+3}\cdot 0\cdot|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}|$$

$$-(2\cdot 1 - 3\cdot(-2)) + (-1)(1\cdot 1 - 3\cdot 2) + (-1)\cdot 0$$

$$-8 - (-5) = -3$$

דרך ב':

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - 2R_1]{R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -6 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

הדטרמיננטה של המטריצה הסופית היא מכפלת איברי האלכסון ולכן -3, ובגלל שכל הפעולות שעשינו לא משנות את הדטרמיננטה, אז זה גם הדטרמיננטה של A.

דרך ג': אפשר לדרג רק חצי מהדרך, ואז לעבור למינורים.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

הפעולות שעינו לא משנות את הדטרמיננטה. לכן הדטרמיננטה של A שווה לדטרמיננטה של המטריצה השניה. נפתח אותה לפי מינורים לפי העמודה הראשונה.

$$(-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot | \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} | + 0 + 0 = -3$$

דרך ד': חישוב לפי תמורות.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$aei - afh - bdi + cdh + bfg - gec$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$1 \cdot -1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot -2 - (3 \cdot -1 \cdot 2) - (1 \cdot 0 \cdot -2) - (2 \cdot 1 \cdot 1) = -3$$

2. תרגיל: יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ הוכיחו כי $|AB| = |BA|$

פתרון:

$$|AB| = |A||B| = |B||A| = |BA|$$

שאלה: האם זה נכון גם עבור A, B לא ריבועיות?

דוגמא נגדית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|AB| = 1$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|BA| = 0$$

3. תרגיל: תהא $A \in \mathbb{R}^{101\times 101}$ אנטי סימטרית. הוכיחו A אינה הפיכה.
פתרון:

$$|A| = |A^t| = |-A| = (-1)^{101}|A| = -|A|$$

לכן

$$|A| = 0$$

כלומר, A לא הפיכה. באותו אופן מסיקים שמטריצה אנטיסימטרית מגודל אי זוגי היא תמיד לא הפיכה.

4. תרגיל תהיינה $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ עבור n אי זוגי, מטריצות המקיימות $AB + BA = 0$ הוכיחו כי A לא הפיכה או B לא הפיכה.
פתרון:

$$AB = -BA$$

$$|AB| = |-BA| = (-1)^n|BA| = -|BA| = -|AB|$$

לכן $|AB| = 0$. זה אומר שהמטריצה AB אינה הפיכה, ולכן מישהי מהן חייבת להיות לא הפיכה (כי כפל של מטריצות הפיכות הוא הפיך).

5. תרגיל: יהיו $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצות ריבועית $|A| = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 100i}, |B| = -3$ חשבו את הדטרמיננטה של $AB^tA^{-1}B^2$

$$|AB^tA^{-1}B^2| = |A||B^t||A^{-1}||B^2| = |A||B||A|^{-1}|B|^2 = |B|^3 = -27$$

6. תרגיל: תהא $A \in \mathbb{R}^{99\times 99}$ הפיכה המקיימת $A^4 + 2A = 0$ מצאו את $|A|$
פתרון:

$$A(A^3 + 2I) = 0$$

נכפיל בA^{-1} ונקבל

$$A^3 + 2I = A^{-1} \cdot 0 = 0$$

$$A^3 = -2I$$

$$|A^3| = |-2I| = (-2)^{99}$$

$$|A|^3 = (-2)^{99}$$

$$|A| = (-2)^{33}$$

7. נתונה

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

המקיימת $|A| = 2$ מצאו את הדטרמיננטה של

$$B = \begin{pmatrix} i-4c & f & 2i+f \\ g-4a & d & 2g+d \\ h-4b & e & 2h+e \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$C_3 - C_2 \begin{pmatrix} i-4c & f & 2i \\ g-4a & d & 2g \\ h-4b & e & 2h \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 - 0.5C_3} \begin{pmatrix} -4c & f & 2i \\ -4a & d & 2g \\ -4b & e & 2h \end{pmatrix} \xrightarrow[0.5C_3]{-0.25C_1}$$

$$\begin{pmatrix} c & f & i \\ a & d & g \\ b & e & h \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} a & d & g \\ c & f & i \\ b & e & h \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

נשים לב שהמטריצה שהגענו אליה היא בדיוק השיחלוף של המטריצה המקורית ולכן יש להן את אותה דטרמיננטה. שזה היה 2. לכן הדטרמיננטה של המטריצה בשאלה היא $(-4) \cdot 2 \cdot 2 = -16$

8. יהא $a \in \mathbb{F}$. נגדיר $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ע"י $A_{i,j} = \begin{cases} a & i = j \\ 1 & i \neq j \end{cases}$ כלומר

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix}$$

חשבו את הדטרמיננטה של A

פתרון: יש 2 דרכים עיקריות לפתור שאלות מהסגנון הזה:

דרך אחת: לעשות פעולות שורה ועמודה על המטריצה.
דרך שניה: להוכיח באינדוקציה.
נבצע את פעולות השורות הבאות:

$$R_1 + R_i$$

לכל $i > 1$. נקבל את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} a+n-1 & a+n-1 & \cdots & a+n-1 \\ 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} a+n-1 & a+n-1 & \cdots & a+n-1 \\ 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix} = (a+n-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix}$$

נבצע את פעולות השורות הבאות: $R_i - R_1$ לכל $i > 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

זאת מטריצה משולשית אז הדטרמיננטה שלה היא מכפלת איברי האלכסון. $(a-1)^{n-1}$
לכן הדטרמיינטה של המטריצה המקורית היא $(a-1)^{n-1}(a+n-1)$
עבור אילו ערכי a המטריצה לא הפיכה? $a = 1$. ולכל n, $a = 1 - n$.

9. ואן דר מונדה: עבור $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ נגדיר את מטריצת ונדרמונד $V \in \mathbb{F}^{n \times n}$ שתלויה בהם ע"י

$$V_{i,j} = a_i^{j-1}$$

או בצורה מפורשת

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

טענה: $|V| = \Pi_{j>i}(a_j - a_i)$
מסקנה: V הפיכה אמ"ם כל כל המספרים שונים.

הוכחה: נוכיח באינזוקציה על גודל המטריצה.
נבצע את הפעולות הבאות:

$$C_j - a_1 C_{j-1}$$

עושים את הפכולות מהעמודה הימנית שמאלה.

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1 a_2 & \cdots & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n - a_1 & a_n^2 - a_1 a_n & \cdots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

נחשב את הדטרמינטה לפי המינורים לפי השורה הראשונה, אז זה שווה ל1 כפול המטריצה שבה מוחקים את השורה הראשונה והעמודה הראשונה

$$\begin{pmatrix} a_2 - a_1 & a_2^2 - a_2 a_1 & \cdots & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n - a_1 & a_n^2 - a_1 a_n & \cdots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

בכל שורה נוציא גורם משותף (האיבר בעמודה הראשונה)

$$\begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_2^{n-2} \\ \vdots & & \\ 1 & a_n & a_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

זאת מטריצת ונדרמונדה עבור המספרים $a_2, .., a_n$, מהנחת האינדוקציה הדטרמיננה שלה זה כל הכפולות של לחסר מספר באינדקס גדול פחות באינדקס קטן. הדטרמיננטה של המטריצה המקורית זה הדטרמיינטה של המטריצה הסופית כפול כל הגורמים המשותפים שהוצאנו $(a_2 - a_1) \cdots (a_n - a_1)$