

שאלון בחינה בקורס: חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2 (89-218)

סמסטר ב; מועד ב. תשע"א

שם המרצה: ד"ר שחר נבו.

משך הבחינה $2\frac{3}{4}$ שעות.

ללא חומר עזר, דף נוסחאות מצורף

ענה על 5 מתוך 6 השאלות הבאות. נמק תשובותיך.

1. א. חשב $\cos 1$ לפי 2 איברים ראשונים שונים מאפס בפיתוח טיילור סביב $x=0$ של $\cos x$. הערך השגיאה לפי שארית לגרנד' באופן מיטבי. (שים לב כי $\cos x$ היא פונקציה זוגית).
ב. השטח בין גרף הפונקציה $f(x) = \sin x$, $0 \leq x \leq 2\pi$ לציר x מסתובב סביב ציר y . מצא נפח גוף הסיבוב שנוצר.

2. א. הבע אורך הגרף של $f(x) = \ln x$, $1 \leq x \leq 3$, כאינטגרל מסויים של פונקצייה רציונלית.

ב. חשב האינטגרל הלא מסויים $\int \frac{2x}{\sqrt{x-1}} dx$.

3. א. חשב $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+2}$ וציין תחום ההתכנסות.

ב. האם קיים האינטגרל הלא אמיתי $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$?

4. א. מצא פתרון למד"ר $0 = (2x + 3x^2 y)dx + (x^3 - 3y^2)dy$ המקיים $y(1) = 2$.

ב. המר המד"ר מסדר 3 $y^{(3)} = x^2 y'' - y' \sin x + e^x y + 5$ במערכת שקולה של 3 מד"ר מסדר 1.

5. מצא כל הפתרונות הממשיים $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ של המערכת $\begin{cases} y_1' = -y_1 - 2y_2 \\ y_2' = 4y_1 + 3y_2 \end{cases}$. מצא גם פתרון המקיים

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

6. א. מצא פתרון של המד"ר מסדר שני $y'' - 5y' + 6y = 0$ המקיים $y(0) = 2, y'(0) = 2$.

ב. מצא האינטגרל הלא מסויים $\int x^3 \sqrt{x^4 + 1} dx$.

בהצלחה!

פתרון

שאלה 1

א.

נחשב תחילה את $f(0), f'(0), f''(0)$.

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\sin x \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -\cos x \Rightarrow f''(0) = -1$$

פולינום טיילור הוא $p(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ $\Leftarrow p(1) = \frac{1}{2}$.

$$f^{(3)}(x) = \sin x$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x$$

לפי שאית לגרנז' יש לחשב את הערך המקסימאלי של $\left| \frac{f^{(4)}(c)}{4!} x^4 \right|$ כאשר $0 \leq c \leq 1$ ו- $x = 1$.

$$\frac{1}{24} \cdot \left| \frac{f^{(4)}(c)}{4!} x^4 \right| = \left| \frac{\cos c}{24} \right| \leq \frac{1}{24}$$

ב.

שטח הפנים הנוצר הוא $\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx$ מהזהות $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$ נקבל

$$\pi \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx = \pi \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{2\pi} = \pi^2$$

שאלה 2

$$dt = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx \Leftarrow t = \sqrt{x^2+1} \text{ נציב } \int_1^3 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int_1^3 \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} dx = \int_1^3 \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx$$

$$\int_1^3 \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}} \frac{x^2+1}{x^2} dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}} \frac{t^2}{t^2-1} dt =$$

$$u = 2x \quad v = 2(x-1)^{0.5} \\ u' = 2 \quad v' = (x-1)^{-0.5}$$

ב. נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים $\int \frac{2x}{\sqrt{x-1}} dx$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x-1}} dx = 4x\sqrt{x-1} - \int 4(x-1)^{\frac{1}{2}} dx = 4x\sqrt{x-1} - \frac{8(x-1)\sqrt{x-1}}{3}$$

שאלה 3

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{nx^{n+2}} = x$ ובנוסף $\sum_{n=1}^{\infty} n$ מתבדר ו- $\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n$ מתבדר ולכן תחום ההתכנסות הוא $-1 < x < 1$.

$$. x^3 f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+2} \Leftarrow f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \Leftarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

$$\cdot \frac{x^3}{(1-x)^2} \text{ הסכום המבוקש הוא } f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \Leftarrow f(x) = \frac{x}{1-x} \Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}} = 1 \text{ בנוסף מתקיים } \frac{1}{\sqrt{x}} : \frac{1}{\sqrt{\sin x}} = \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}} \text{ נשתמש במבחן השוואה השני } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} \text{ מתכנס ולכן גם } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

שאלה 4

א. מצא פתרון למד"ר $0 = (2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy$ המקיים $y(1) = 2$

פתרון

נשים לב שהמשוואה מדוייקת $u(x, y) = x^2 + x^3y + c(y) \Leftarrow u(x, y) = \int (2x + 3x^2y)dx + c(y)$

$$c(y) = -y^3 \Leftarrow -3y^2 = c'(y) \Leftarrow x^3 - 3y^2 = x^3 + c'(y) \Leftarrow u'_y = x^3 + c'(y)$$

$$u(x, y) = x^2 + x^3y - y^3$$

הפתרון הוא $c = x^2 + x^3y - y^3$ ולכן $y(1) = 2$ ולכן $c = -5$

שאלה 5

מצא כל הפתרונות הממשיים $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ של המערכת $\begin{cases} y_1' = -y_1 - 2y_2 \\ y_2' = 4y_1 + 3y_2 \end{cases}$. מצא גם פתרון המקיים

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

פתרון

$$\lambda = 1 \pm 2i \Leftarrow \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \Leftarrow (\lambda + 1)(\lambda - 3) + 8 = 0 \Leftarrow \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 2 \\ -4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0$$

נמצא את הוקטור העצמי שמתאים לערך העצמי $\lambda = 1 + 2i$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 - i \end{pmatrix}$$

$$y_1 = e^x(\cos 2x + i \sin 2x) \Rightarrow y_1 = e^x \cos 2x + i e^x \sin 2x$$

$$y_2 = (-1 - i)e^x(\cos 2x + i \sin 2x) \Rightarrow y_2 = e^x(\sin 2x - \cos 2x) + i e^x(-\cos 2x - \sin 2x)$$

הפתרון הוא

$$y_1 = c_1 e^x \cos 2x + c_2 e^x \sin 2x$$

$$y_2 = c_1 e^x(\sin 2x - \cos 2x) + c_2 e^x(-\cos 2x - \sin 2x)$$

$$c_1 = 1$$

$$-1 - c_2 = 2 \Rightarrow c_2 = -3 \text{ ולכן } \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = e^x \cos 2x - 3e^x \sin 2x$$

$$y_2 = e^x(\sin 2x - \cos 2x) - 3e^x(-\cos 2x - \sin 2x) \Rightarrow y_2 = 2e^x \cos 2x + 4e^x \sin 2x$$

שאלה 6

ב. מצא האינטגרל הלא מסויים $\int x^3 \sqrt{x^4 + 1} dx$.

פתרון

$$\int x^3 \sqrt{x^4 + 1} dx = \frac{1}{4} \int \sqrt{t} dt = \frac{2t\sqrt{t}}{6} = \frac{2(x^4 + 1)\sqrt{x^4 + 1}}{6} \text{ נציב } dt = 4x^3 dx \Leftarrow t = x^4 + 1$$

