

הרצאה 1

מילות מפתח: התכנסות, רציפות, קבוצות פתוחות, טופולוגיה ... Topology = Topos + Logos

Topology \supset {Algebraic Topology, Topological Algebra, Differential Topology, ...}

מרחב מטרי -- אחת מהדרכים לקבלת מרחבים טופולוגיים.

{Metric Spaces} \rightarrow {Topological Spaces} (לא על, לא חח"ע)

מרחבים מטריים קישור מומלץ

הגדרה (Frechet 1906): מטריקה (או מרחק) על קבוצה $X \neq \emptyset$ היא פונקציה

$$d: X \times X \rightarrow [0, \infty) \quad (x, y) \mapsto d(x, y)$$

אקסיומות:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad (m_1)$$

$$d(x, y) = d(y, x) \quad (m_2)$$

$$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z) \quad (m_3 \text{ אי שוויון המשולש}).$$

אינדוקציה! (שקול: $d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_{n-1}, x_n)$)

אומרים ש- (X, d) מ"מ (metric space).

דוגמאות:

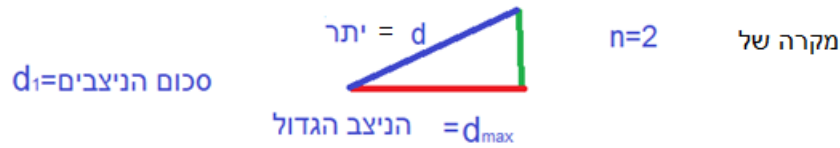
$$(1) \quad (\mathbb{R}, d) \quad \text{שמוגדרת לפי} \quad d(x, y) = |x - y|$$

$$(2) \quad X = \mathbb{R}^n \quad x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \quad \text{א. מטריקה אוקלידית} \quad (\mathbb{R}^n, d)$$
$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

$$\text{ב. מטריקת הסכום} \quad \text{Manhattan metric} \quad d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

$$\text{ג. מטריקת המקסימום} \quad d_{\max}(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : i \in \{1, \dots, n\}\}$$

הערה: $d_{\max} \leq d \leq d_1 \leq nd_{\max}$



הגדרה: (מרחב נורמי) נניח E מרחב ווקטורי על שדה \mathbb{R} .

פונקציה $\|\cdot\|: E \rightarrow [0, \infty)$ נקראת **נורמה** אם מתקיים:

$$\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0_E \quad (n_1)$$

$$c \in \mathbb{R}, v \in E \quad \text{לכל} \quad \|cv\| = |c| \cdot \|v\| \quad (n_2)$$

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad (n_3)$$

אז $(E, \|\cdot\|)$ נקרא **מרחב נורמי** normed space

משפט: לכל מ"נ $(E, \|\cdot\|)$ הפונקציה $d_{\|\cdot\|}(u, v) := \|u - v\|$ $d_{\|\cdot\|}: E \times E \rightarrow [0, \infty)$

היא מטריקה (שנקראת מטריקה של הנורמה) ותמיד מתקיים $\|v\| = d_{\|\cdot\|}(0_E, v)$

הוכחה:

$$d(x, y) = \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0_E \Leftrightarrow x = y \quad (n_1)$$

$$\|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = (-1) \cdot \|y - x\| = \|y - x\| \quad (n_2)$$

$$\|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| \quad (n_3)$$

$$\|v\| = \|-v\| = \|0_E - v\| = d_{\|\cdot\|}(0_E, v)$$

הערה: "ההתאמה" $(E, \|\cdot\|) \mapsto (E, d_{\|\cdot\|}) \rightarrow \{metric\ spaces\}$ $\{normed\ spaces\}$

א. לא על

הסבר: למשל מרחב מטרי עם 2 נקודות או מרחב מטרי מעגל עם מטריקה אוקלידית "לא מתקבלת" בתמונה של ההתאמה הנ"ל.

ב. חד חד ערכית

הסבר: נובע מהשוויון $\|v\| = d_{\|\cdot\|}(0_E, v)$. מטריקת הנורמה משחזרת את הנורמה.

דוגמאות של מרחב נורמי:

• במרחב ווקטורי \mathbb{R}^n בעל ממד n נגדיר:

א. נורמה אוקלידית $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ (משרה מטריקה אוקלידית)

ב. נורמה של הסכום $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ (משרה מטריקת הסכום)

ג. נורמה של מקסימום $\|x\|_\infty = \|x\|_{\max} = \max\{|x_i| : i \in \{1, \dots, n\}\}$ (משרה מטריקת מקסימום)

הערה: $\|x\|_{\max} \leq \|x\| \leq n \|x\|_{\max}$

* בקבוצה $C[a, b] := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continuous functions}\}$ נגדיר:

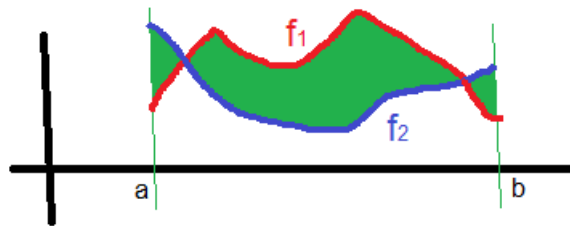
א. $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$ מסמנים גם $\|f\|_\infty$.

משרה מטריקת מקסימום $d_{\max}(f_1, f_2) = \max_{a \leq x \leq b} |f_1(x) - f_2(x)|$ (מדוע מתקבל Max?)

"הסטייה" המקסימלית בין הפונקציות f_1, f_2 בקטע נתון.

ב. $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$ משרה "מטריקת השטחים" $d_1(f_1, f_2) = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx$

"השטח" בין הגרפים של הפונקציות f_1, f_2 בקטע $[a, b]$



הגדרה: (X, d) נקרא מרחב פסאודו-מטרי (*pseudometric*), נקרא *semimetric* לפעמים) אם:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad (m_1^p)$$

$$d(x, y) = d(y, x) \quad (m_2)$$

$$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z) \quad (m_3)$$

הגדרה: (X, d) נקרא מרחב אולטרה-מטרי (*ultrametric*) אם:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad (m_1)$$

$$d(x, y) = d(y, x) \quad (m_2)$$

$$\max\{d(x, y), d(y, z)\} \geq d(x, z) \quad (m_3 \text{ של } m_3^u)$$

$$\{\text{pseudometric}\} \supset \{\text{metric}\} \supset \{\text{ultrametric}\}$$

הערה: לכל מטריקה d גם $c \cdot d$ מטריקה $\forall c > 0$ (נכון גם עבור פ"מ, אולטרה-מטריקה)

• לכל קבוצה X נגדיר $\forall x, y \in X: d_0(x, y) = 0$
פסאודו מטריקת האפס.

• ב- $X = \mathbb{R}^2$, נגדיר $\rho_1(x, y) := |x_1 - y_1|$

פסאודו-מטריקה (אבל לא מטריקה). **למשל** $\rho_1((3,5), (3,18)) = 0$.

• ב- $X = \mathbb{R}^n$, נגדיר $\rho_k(x, y) := |x_k - y_k|$ (הרכיב ה- k)

• ב- $X = C[0, 5]$ $\|f\|_{1 \leq x \leq 2} = \max\{|f(x)| : x \in [1, 2]\}$ semi-norm (מדוע לא נורמה?)

• נגדיר על קבוצה X "אולטרה-מטריקה 1-0":

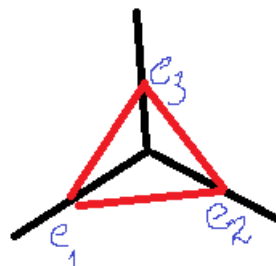
$$d_\Delta(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

טענה: על כל קבוצה X עם $|X| \geq 2$ יש (לפחות) 2^{\aleph_0} מטריקות שונות.

$$\text{card}\{rd_\Delta : r > 0\} = \text{card}(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0} \quad \textbf{הסבר:}$$

$$\text{תרגיל: } X = \left\{ \frac{e_1}{\sqrt{2}}, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{e_n}{\sqrt{2}} \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

עם מטריקה שמושרית מ- d נותן דוגמה ספציפית של d_Δ .



$$d\left(\frac{e_i}{\sqrt{2}}, \frac{e_j}{\sqrt{2}}\right) = \left\| \frac{e_i}{\sqrt{2}} - \frac{e_j}{\sqrt{2}} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\|e_i - e_j\|}{\sqrt{2}} = \begin{cases} 1 & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases} \quad \textbf{הסבר:}$$

$$\|e_i - e_j\| = \sqrt{\dots + 1^2 + \dots + 1^2 + \dots} = \sqrt{2} \quad i \neq j$$

• **דוגמה חשובה:** על שלמים \mathbb{Z} נגדיר מטריקה **p-אדית** לכל מספר ראשוני $p \in \mathbb{P}$ נתון.

$$d_p(x, y) := \begin{cases} \frac{1}{p^{k(x, y)}}, & k(x, y) := \max\{i : p^i | (x - y)\}, \quad x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

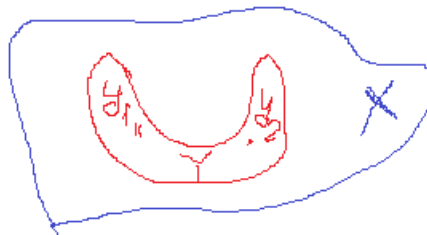
$$d_3(24, 6) = ? \quad .x = 24, y = 6, p = 3 \quad \text{למשל:}$$

$$d_3(24, 6) = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$24 - 6 = 18 = 3^2 \cdot 2$$

$$d_3(0, 5) = d_3(0, 1) = 1$$

הגדרה (תת מרחב מטרי): יהי (X, d) מ"מ, $\emptyset \neq Y \subseteq X$.



מטריקת הצמצום של Y מוגדרת:

$$d_Y(y_1, y_2) = d(y_1, y_2)$$

$$\forall y_1, y_2 \in Y$$

מתקבל מ"מ (Y, d_Y) שנקרא **תת מרחב מטרי** של (X, d) .

$$Y = \underbrace{\left\{ \frac{e_i}{\sqrt{2}}, 1 \leq i \leq n \right\}}_{\text{ת"מ מטרי}} \subset \underbrace{(\mathbb{R}^n, d)}_{=X} \quad \text{למשל:}$$

מטריקת הצמצום על Y כאן שווה ל- d_Δ .

הערה: כל מ"מ הוא תת מרחב מטרי (עד כדי איזומטריה) של מרחב נורמי (נוכיח בהמשך).

הגדרה: נתון מ"מ (X, d) , $\emptyset \neq A, B \subseteq X$,

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

$$0 \leq d(A, B) < \infty$$

אזהרה: זאת לא מטריקה וגם לא פסאודו-מטריקה בקבוצה $P(X)$ של תת קבוצות.

הערה: לא תמיד \inf ניתן להחליף ב- \min .

$$A = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}, B = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$$

$$\min \neq \inf = d(A, B) = 0$$

תרגיל חשוב: תמיד מתקיים $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$

הגדרה (הקוטר): $diam(A) := \sup\{d(x,y) | x,y \in A\}$

$$0 \leq diam(A) \leq \infty$$

$diam(A) < \infty$ נקראת חסומה אם

הערה: לא תמיד $sup = max$ $A = (0,1)$ $diam = 1$ $max \dots \neq sup \dots$

דוגמה: $diam(\mathbb{Z}, d_p) = 1$

$$\frac{1}{p^k} \leq 1 \quad \forall k \in \{0,1,\dots\} \quad d_p(0,1) = 1$$

הגדרות: יהי (X, d) , $a \in X$, $r > 0$

(1) כדור פתוח עם מרכז ב- a ורדיוס r $B(a,r) = B_r(a) := \{x \in X | d(a,x) < r\}$

(2) כדור סגור $a \in B[a,r] = B_r[a] := \{x \in X | d(a,x) \leq r\}$

(3) ספירה $a \notin S(a,r) = S_r(a) := \{x \in X | d(a,x) = r\}$ sphere

הערה: $a \in B(a,r) \subseteq B[a,r]$ $\underbrace{S(a,r)}_{a \notin} \subsetneq \underbrace{B[a,r]}_{a \in}$

דוגמה: לתאר $B(a,r), B[a,r], S[a,r]$ במרחב (X, d_Δ)

$$S[a,r] = \begin{cases} \emptyset & 0 < r \neq 1 \\ X \setminus \{a\} & r = 1 \end{cases} \text{ למשל: } \dots \dots \text{ (המשיכו !)}$$

דוגמה: ב (\mathbb{Z}, d_3) $B[0, \frac{1}{3}] = 3\mathbb{Z}$

הסבר: $B[0, \frac{1}{3}] = \{x \in \mathbb{Z} : d_3(x,0) \leq \frac{1}{3}\} = \{x \in \mathbb{Z} : 3 | x\} = 3\mathbb{Z}$

תכונות: (לבדוק !)

(א) $0 < r_1 \leq r_2 \Rightarrow B_{r_1}(a) \subseteq B_{r_2}(a)$

(ב) $diam(B_r(a)) \leq 2r$ (לא תמיד שווה. דוגמה ?)

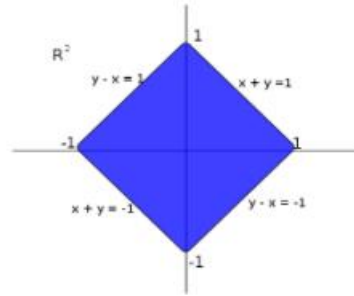
(ג) $\exists z \in X, \exists r > 0: A \subseteq B_r(z) \Leftrightarrow A$ חסומה

$$B_{d_Y}(y, \epsilon) = B(y, \epsilon) \cap Y \quad (\text{כדור בתת מרחב}) \quad (\text{ד})$$

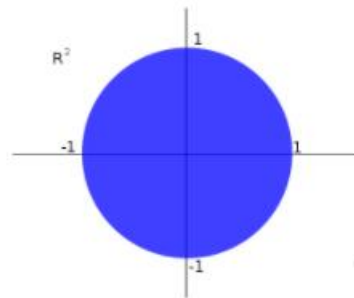
$$d \leq \rho \Rightarrow B_\rho(a, r) \subseteq B_d(a, r) \quad (\text{ה})$$

דוגמה: לתאר $B(a, r)$ במרחבים $(\mathbb{R}^2, d_{max}), (\mathbb{R}^2, d_1), (\mathbb{R}^2, d)$

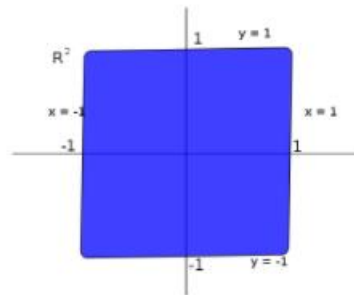
- The metric induced by $\|\cdot\|_1$ in that case, the unit ball is: $|x| + |y| < 1$



- The metric induced by $\|\cdot\|_2$ in that case, the unit ball is: $\sqrt{x^2 + y^2} < 1$



- The metric induced by $\|\cdot\|_\infty$ in that case, the unit ball is: $\max\{|x|, |y|\} < 1$



הגדרה: $f: (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ (בין מרחבים – מטריים). אומרים ש- f

שיכון איזומטרי אם שומרת מרחקים, כלומר $\forall x_1, x_2 \in X: \rho(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2)$

$$\begin{cases} f(X) = Y \\ f \text{ שומרת מרחקים} \end{cases} \quad \text{איזומטריה אם}$$

טענה: כל שיכון איזומטרי תמיד חח"ע.

הוכחה: אם $x_1 \neq x_2$ נניח ש $f(x_1) = f(x_2)$

$$0 = \rho(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2) \underset{m_1}{\geq} 0$$

בסתירה!

■

שימו לב: אם $f : X \rightarrow Y$ שיכון איזומטרי אם ורק אם $f : X \rightarrow f(X)$ איזומטריה.

הערה: איזומטריה ב $Metr$ – בתפקיד של איזומורפיזמים. ז"א יש אותן תכונות מטריה.

• $[8,10] \not\approx [1,2] \approx [5,6]$

הסבר: הזזה ל 4 יחידות בממשיים היא איזומטריה

$$T_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 4 + x$$

$$[1,2] \rightarrow [5,6] \text{ משרה איזומטריה}$$

ב $[8,10]$ קיימות נקודות x, y כך ש $d(x, y) = 2$ אבל לא ב $[1,2]$.

(הסבר אחר: המרחבים עם קוטר שונה. אבל קוטר נשמר ע"י איזומטריה)

• שיכון איזומטרי לינאר $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ לכל $m \leq n$ (להשלים)

• כל הזזה $T_a : E \rightarrow E \quad T_a(v) = a + v$ במרחב נורמי $a \in E$ היא איזומטריה.

$$\|(a + v_1) - (a + v_2)\| = \|v_1 - v_2\| \quad \text{הסבר:}$$

• כל הזזה $T_a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \quad T_a(x) = a + x$ במרחב (\mathbb{Z}, d_p) היא איזומטריה.

(להשלים)

• (\mathbb{Z}, d_3) לא איזומטרי עם (\mathbb{Z}, d_5) .

הסבר: ב (\mathbb{Z}, d_5) קיימות נקודות x, y כך ש $d_5(x, y) = \frac{1}{5}$ אבל לא ב (\mathbb{Z}, d_3) .

• קיים שיכון איזומטרי $\mathbb{R}^n \rightarrow l_2$.

(להשלים) דומה למקרה של $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ לכל $m \leq n$.

• קיים שיכון איזומטרי $(\mathbb{N}, d_\Delta) \rightarrow l_2$.

הסבר מהיר: $(\mathbb{N}, d_\Delta) \rightarrow \{\frac{e_n}{\sqrt{2}} : n \in \mathbb{N}\}, \quad n \mapsto \frac{e_n}{\sqrt{2}}$ איזומטריה.

הערה: מרחב הילברט סדרתי $l_2 = \{x = (x_1, x_2, \dots) : \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$

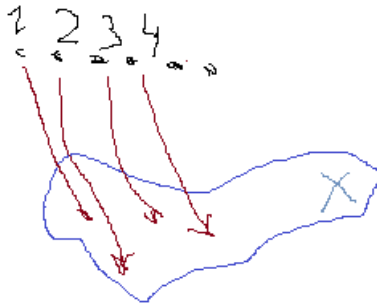
$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \quad \text{מכפלה סקלרית (פנימית).}$$

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}$$

התכנסות סדרות

הגדרה (תזכורת): סדרה x_n בקבוצה X היא פונקציה $f: \mathbb{N} \rightarrow X, n \mapsto f(n) = x_n$.

תת סדרה x_{n_k} היא צמצום הפונקציה על תת קבוצה אינסופית $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$



הגדרה: אומרים שסדרה x_n מתכנסת ל $a \in X$ במרחב (X, d)

ונסמן $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ (או $x_n \xrightarrow{d} a$) אם מתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(a, x_n) = 0 \quad \text{הגדרה 1:}$$

הגדרה 2: כל ε -סביבה $B(a, \varepsilon)$ של a מכילה כמעט כל האיברים של הסדרה x_n

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(a, x_n) < \varepsilon \quad \text{הגדרה 3:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3^n = 0 \quad \text{ב } (\mathbb{Z}, d_3) \text{ דוגמה:}$$

$$d_3(3^n, 0) = \frac{1}{3^n} \rightarrow 0 \quad \text{הסבר:}$$

הערה:

- סדרה קבועה לבסוף תמיד מתכנסת (ברור מה הגבול!). בכל מרחב (X, d) .
- תת סדרה של סדרה מתכנסת גם מתכנסת (ברור מה הגבול!).
- נניח $\rho \leq d$ אז $x_n \xrightarrow{d} a \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\rho} a$.
- **הסבר:** $0 \leq \rho(a, x_n) \leq d(a, x_n) \rightarrow 0$ בעזרת תכונת סנדוויץ $\rho(a, x_n) \rightarrow 0$.
- התכנסות ב \mathbb{R}^n היא התכנסות רכיב-רכיב.

הסבר: התכנסות גוררת "התכנסות רכיב-רכיב" כי

$$0 \leq \|v^{(m)} - u\| \leq \|v^{(m)} - u\|_k \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

($\|x\|_k$ "סמי-נורמה לפי קואורדינטה ה- k " שהגדרנו)

גם ההפך נכון. תשתמשו בזה ש $\sum_{k=1}^n \|v\|_k =$ "נורמה של הסכום".

תרגיל: תנו דוגמה של סדרה לא מתכנסת ב l_2 שמתכנסת רכיב-רכיב.

הסבר: הסדרה הבאה מתכנסת רכיב רכיב לזיקטור האפס

$$e_1 = (1, 0, 0, 0, \dots)$$

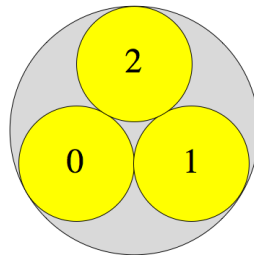
$$e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$$

$$e_3 = (0, 0, 1, 0, \dots)$$

...

(המשיכו ...) $d(e_i, e_j) = 1 \quad \forall i \neq j$ לא מתכנסת כי $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

***תרגיל:** לפי האיור הבא תרכיבו ניסוח לתרגיל אפשרי לגבי מ"מ (\mathbb{Z}, d_3)



ניסוח אפשרי: המרחב אפשר להציג כאיחוד של שלושה כדורים סגורים עם רדיוס $\frac{1}{3}$.

$$B_{\frac{1}{3}}[0] \cup B_{\frac{1}{3}}[1] \cup B_{\frac{1}{3}}[2] = 3\mathbb{Z} \cup (3\mathbb{Z} + 1) \cup (3\mathbb{Z} + 2) = \mathbb{Z} \quad \text{הסבר:}$$

הגדרה: נק' $a \in X$ נקראת **מבודדת** (isolated) אם $\exists \epsilon > 0: B(a, \epsilon) = \{a\}$

דוגמאות: א. אין נקודה מבודדת ב \mathbb{R} או ב \mathbb{Q} ...

ב. נקודה 3 מבודדת בתת מרחב $X = [0, 1] \cup \{3\}$ של \mathbb{R} .

הגדרה: מ"מ (X, d) נקרא **דיסקרטי** אם כל נקודה ב X מבודדת.

• \mathbb{N}, \mathbb{Z} , כל מרחב X עם מטריקת 0-1 הם דיסקרטיים.

• (Hamming distance)

בקבוצה $F(\mathbb{N}) = \{(x_1, x_2, \dots) : x_i \in \{0, 1\} \exists k \in \mathbb{N} x_i = 0 \forall i > k\}$

$$d_H(x, y) = \sum_i |x_i - y_i|$$

$(F(\mathbb{N}), d_H)$ מרחב מטרי כך שהטופולוגיה שלו היא דיסקרטית.

המשמעות של $d_H(x, y)$ היא מספר ההבדלים בין המילים x, y .

מ"מ $(F(\mathbb{N}), d_H)$ משוכן לתוך מרחב נורמי $l_1 = \{x = (x_1, x_2, \dots) : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty\}$

משפט: a נקודה מבודדת במרחב מטרי (X, d) אם ורק אם

$\lim x_n = a$ גורר שהסדרה x_n היא בהכרח קבועה לבסוף $x_1, \dots, x_m, a, a, \dots$.

כיוון שני נוכיח יותר: שקיימת סדרה עם איברים שונים שמתכנסת ל a .

הוכחה: אם a מבודדת אז קיים $\varepsilon > 0$ כך ש $B(a, \varepsilon) = \{a\}$.

(כיוון ראשון) נניח ש $\lim x_n = a$.

עבור ε הנ"ל קיים $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ כך ש $x_n \in B(a, \varepsilon) = \{a\}$ אז הסדרה היא לבסוף a .

(כיוון שני) נניח כעת שנקודה a לא מבודדת.

נוכיח: שקיימת סדרה עם איברים שונים שמתכנסת ל a .

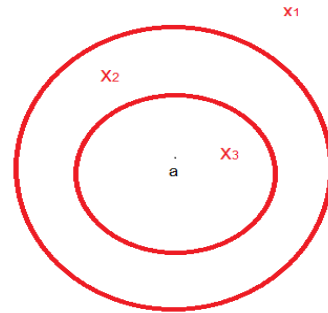
נבחר $x_1 \neq a$ (אם לא קיים אז המרחב הוא נקודון $\{a\} = X$ והנקודה מבודדת).

נבחר $0 < \varepsilon_1 < \min\{d(a, x_1), 1\}$

נעיר ש $0 < d(a, x_1)$ כי (X, d) מרחב מטרי ומתקיימת m_1 .

בגלל ש a לא מבודדת קיים $x_2 \in B(a, \varepsilon_1), x_2 \neq a$.

נעיר ש $x_2 \neq x_1$ כי $d(a, x_2) < d(a, x_1)$ וגם $d(a, x_2) < 1$.



נמשיך בצורה רקורסיבית את הבנייה.

אם כבר הגדרנו x_1, \dots, x_n (שונים) $d(a, x_n) < d(a, x_{n-1}) < \dots < d(a, x_1)$

ולא שווים ל a עם התנאי $\forall 1 < k \leq n \quad d(a, x_k) < \frac{1}{k-1}$

אז נבחר ε_n שמקיים $0 < \varepsilon_n < \min\{d(a, x_n), \frac{1}{n}\}$

ונבחר x_{n+1} כך ש $d(a, x_{n+1}) < \varepsilon_n, x_{n+1} \neq a$ (שוב שימו לב ש a לא מבודדת)

אז $d(a, x_{n+1}) < d(a, x_n) < d(a, x_{n-1}) < \dots < d(a, x_1)$

כך נקבל סדרה עם איברים שונים ו $\lim x_n = a$ כי לכל $n > 1 \quad d(a, x_n) < \frac{1}{n-1}$.

☺

תרגיל: הוכיחו שלא קיימת נקודה מבודדת ב (\mathbb{Z}, d_p) .

הסבר: $a + p^n \xrightarrow{d_p} a \quad \forall a \in \mathbb{Z}$ סדרה עם איברים שונים שמתכנסת ל a .

הרצאה 2

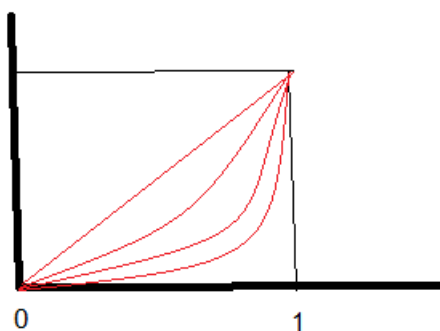
דוגמה: ב - $C[0,1]$ קיימת סדרה f_n כך ש

$$\begin{cases} f_n \xrightarrow{d_1} \theta \\ f_n \not\xrightarrow{d_{max}} \theta \end{cases}$$

$$d_{max}(f_1, f_2) := \max_{0 \leq x \leq 1} |f_1(x) - f_2(x)| \quad d_1(f_1, f_2) := \int_0^1 |f_1(x) - f_2(x)| dx$$

הסבר:

נגדיר סדרה של פונקציות (סדרה ב - $C[0,1]$) $f_n(x) = x^n, x \in [0,1]$ $\theta(x) = 0$



$$d_1(f_n, \theta) = \int_0^1 |f_n(x) - 0| dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$f_n \xrightarrow{d_1} \theta \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_1(f_n, \theta) = 0$$

מצד שני

$$d_{max}(f_n, \theta) = \max_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x) - 0(x)| = \max_{0 \leq x \leq 1} x^n = 1 \not\rightarrow 0$$

$$\Rightarrow d_{max}(f_n, \theta) \not\rightarrow 0$$

$$\Rightarrow f_n \not\xrightarrow{d_{max}} \theta$$

תרגיל: באופן דומה לכל $a < b$, $[a, b]$

הגדרות:

(א) נניח d, ρ מטריקות על אותה קבוצה X . אומרים ש - d דומיננטי ביחס ל - ρ אם:

$$\boxed{x_n \xrightarrow{d} a \Rightarrow x_n \xrightarrow{\rho} a}$$

לכל סדרה $x_n \in X$

(ב) אומרים ש - $d \sim \rho$ ("שקולות") אם יש אותה התכנסות. ז"א

$$\boxed{x_n \xrightarrow{d} a \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\rho} a}$$

תכונות פשוטות:

(1) $d \sim c \cdot d$, $c > 0$ קבוע.

(2) $d \Leftarrow \rho \leq cd$ דומיננטי ביחס ל- ρ (הסבר: דרך תכונת הסנדוויץ').

(3) מטריקת 1-0 (או כל מטריקה עם טופולוגיה דיסקרטית) דומיננטית ביחס לכל מטריקה.

הסבר: כי לגבי מטריקת 1-0 נקבל מרחב דיסקרטי. כל נקודה מבודדת. במרחב כזה יש רק התכנסות קבועה לבסוף. מצד שני כל סדרה שהיא קבועה לבסוף מתכנסת לגבי כל מטריקה על אותה קבוצה.

דוגמה: d_{max} דומיננטי ביחס ל- d_1 בקבוצה $C[a, b]$.

הסבר: מ"ל - $d_1 \leq c \cdot d_{max}$

ש"ל - $\|\cdot\|_1 \leq c \cdot \|\cdot\|_{max}$

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b \max |f(x)| dx \leq \underbrace{(b-a)}_{\text{קבוע } c>0} \cdot \underbrace{\max_{a \leq x \leq b} |f(x)|}_{=\|f\|_{max}}$$

דוגמה: $X := \mathbb{R}^n$ $d_{max} \sim d \sim d_1$

הסבר: $d_{max} \leq d \leq d_1 \leq n \cdot d_{max}$

מסקנה: שלושת המטריקות הנ"ל שונות אבל יש אותה התכנסות.

בהמשך נוכיח – הטופולוגיות שוות!

הגדרה: (טופולוגיה של מרחב פסאודו-מטרי (X, d))

נגדיר טופולוגיה של (X, d) כאוסף של כל תת-קבוצות פתוחות ב- X . נסמן:

$$top(d) = top(X, d) := \{(X, d) \text{ פתוחות ב-}\}$$

כאשר "קבוצה פתוחה" מוגדרת כך:

אומרים ש- $X \supseteq O$ היא פתוחה אם (כל נקודה שלה פנימית) מתקיים:

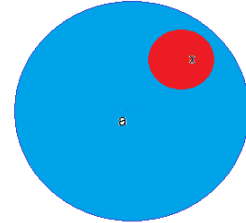
$$\boxed{x \in O \Rightarrow \exists \varepsilon_x > 0 : B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq O}$$

שימו לב: תת קבוצה $A \subseteq X$ לא פתוחה ב- (X, d) אם קיימת נקודה $a \in A$ כך ש

$B(a, \varepsilon)$ לא מוכל ב- A לכל $\varepsilon > 0$.

הערה: מכאן ברור למשל $\emptyset \in \text{top}(d)$.

משפט: $\forall r > 0, \forall a \in X, \forall (X, d) : B_r(a) \in \text{top}(d)$.
 ("ז"א "כדור פתוח" קבוצה פתוחה).



הוכחה: הרעיון: $d(a, x) + r_x < r$.

מכאן ניקח כל מס' r_x כך: $0 < r_x < \underbrace{r - d(a, x)}_{\substack{\text{חיובי} \\ \text{כי } x \in B_r(a)}}$

נוכיח $B_{r_x}(x) \subseteq B_r(a)$.

נניח $y \in B_{r_x}(x)$, צ"ל - $y \in B_r(a)$.

$$d(a, y) \stackrel{m_3}{\leq} d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + r_x < r$$

$$\Rightarrow d(a, y) < r$$

ז"א $y \in B_r(a)$.

זה קורה עבור כל $x \in B_r(a)$ (ועבור r_x מתאים) ולכן $B_r(a)$ קבוצה פתוחה.



תוצאה: {כדורים פתוחים} בסיס לטופולוגיה $(\text{top}(d))$

$$\text{top}(d) \ni 0 = \bigcup_{x \in O} B_{\epsilon_x}(x)$$

התנאים הבאים שקולים:

$$(1) \quad \emptyset \neq O \in \text{top}(d)$$

$$(2) \quad 0 = \text{איחוד של "כדורים פתוחים"}.$$

תרגיל: הוכיחו שלכל מרחב $(X, \text{top}(d))$ מתקיים:

$$\emptyset, X \in \text{top}(d) \quad (t_1)$$

$$(t_2) \quad O_1, O_2 \in \text{top}(d) \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \text{top}(d) \quad (\text{חיתוך סופי של קבוצות פתוחות גם פתוח})$$

$(t_3) \bigcup_{i \in I} O_i \in \text{top}(d) \Rightarrow \forall i \in I \quad O_i \in \text{top}(d)$ (איחוד של קבוצות פתוחות גם פתוח)

הערה: $\{t_1, t_2, t_3\}$ "אקסיומות של טופולוגיה" על קבוצה X בצורה אבסטרקטית.

הערה: אחד מהמתמטיקאים שהשפיעו על טופולוגיה בצורה מאוד חזקה היה *Felix Hausdorff*. על החיים ומותו הטרגי בתקופת הנאצים בגרמניה ממליץ לקרוא

https://en.wikipedia.org/wiki/Felix_Hausdorff

משפט (תכונת Hausdorff):

נניח (X, d) מרחב מטרי. אז לכל 2 נקודות שונות יש סביבות זרות.

הוכחה: $a \neq b \stackrel{m_1}{\Rightarrow} d(a, b) > 0$

ניקח $0 < \epsilon \leq \frac{d(a,b)}{2}$

אז $B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b) = \emptyset$. נבדוק!

אם נניח שלא: $\exists x \in B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b)$

$$\begin{cases} d(a, x) < \epsilon \\ d(b, x) \stackrel{m_2}{=} d(x, b) < \epsilon \end{cases}$$

נחבר: $d(a, b) \stackrel{m_3}{\leq} d(a, x) + d(x, b) < 2\epsilon$

$$\Rightarrow d(a, b) < 2\epsilon$$

☺ סתירה לבחירה

משפט (יחידות הגבול): במרחב מטרי גבול סדרה הוא יחיד (אם קיים).

הוכחה: אם נניח בשלילה $a \neq b$ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

לפי משפט (תכונת Hausdorff) יש סביבות זרות

$$B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b) = \emptyset$$

מצד שני, כמעט כל האיברים x_n נמצאים ב- $B_\epsilon(a)$ וגם ב- $B_\epsilon(b)$.

☺ מכאן סתירה \Leftarrow מש"ל.

דוגמה נגדית (במרחב פסאודו-מטרי אין יחידות הגבול)

במרחב פסאודו-מטרי $X = (\mathbb{R}^2, \rho_1)$ עם $\rho_1(x, y) := |x_1 - y_1|$

ניקח את הסדרה $x_n = \left(1 + \frac{2}{n}, 7\right) \rightarrow (1, y) \quad \forall y \in \mathbb{R}$

אין יחידות של הגבול! (צריך לשים לב שזאת לא מטריקה).

תרגיל: הוכיחו שמרחב פסאודומטרי עם יחידות הגבול הוא תמיד מרחב מטרי.

הערה:

ב (X, d) מ"פ, $a \in X$, x_n סדרה. התנאים הבאים שקולים:

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, a) = 0 \quad \mathbb{R} \quad (d(x_n, a) \rightarrow 0)$$

$$(2) \quad \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, n > N: d(x_n, a) < \epsilon$$

(3) בכל ϵ -סביבה של a (ז"א בכל $B(a, \epsilon)$) נמצאים כמעט כל האיברים של הסדרה.

(4) בכל קבוצה פתוחה O שמכילה את a , כמעט כל האיברים נמצאים ב- O .

הגדרה: ת"ק A במרחב (X, d) נקראת **סגורה** אם המשלים קבוצה פתוחה.

$$\text{ז"א אם} \quad A^c := X \setminus C \in \text{top}(d)$$

למשל: $B_r[a]$ ("כדור סגור") הוא סגור.

לבדוק! (יש הוכחה פשוטה גם דרך רציפות פונקציות!)

טענה: איחוד **סופי** של קבוצות סגורות סגור. חיתוך של קבוצות סגורות סגור.

רמז: ניתן להוכיח את זה ע"י התכונות של קבוצות פתוחות וחוקי דה-מורגן.

תרגיל: הוכיחו שכל נקודון סגור במרחב מטרי (ושזה לא נכון במרחב פסאודו-מטרי).

הסיקו: כל תת קבוצה סופית במרחב מטרי היא סגורה.

תרגיל: הוכיחו שכל קבוצה סגורה במרחב מטרי = חיתוך בן מנייה של קבוצות פתוחות.

סדרות קושי ושלמות

הגדרה: (X, d) מ"מ. סדרה $x_n \in X, n \in \mathbb{N}$ נקראת **סדרת קושי** (Cauchy) אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ כך ש:

$$d(x_i, x_j) < \epsilon$$

$$i, j \geq n_\epsilon$$

הערה: אם x_n מתכנסת ב X אז x_n סדרת קושי (לבדוק!).
הגדרה: מ"מ (X, d) נקרא **שלם** (Complete) אם לכל סדרת קושי x_n ב X יש גבול ב- X .

הגדרה: מ"מ $(E, \|\cdot\|)$ נקרא **מרחב בנך** (Banach space) אם $(E, d_{\|\cdot\|})$ שלם.

דוגמאות:

- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ מרחבי Banach
- $(C[a, b], \|\cdot\|_2)$, $(C[a, b], \|\cdot\|_1)$ לא מרחבי Banach

הערה: $\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx$

מכפלה פנימית ב $C[a, b]$ שממנה מקבלים נורמה: $\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$

הנורמה מגדירה מטריקה d_2 על מרחב הפונקציות $C([a, b])$.

- נגדיר $l_\infty := \left\{ x = (x_1, x_2, \dots) \mid \|x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| < \infty \right\}$ מרחב Banach

מרחבה Banach של **סדרות חסומות**.

הכללה: מרחב פונקציות חסומות על קבוצה S

$l_\infty(S) := \{f: S \rightarrow \mathbb{R} \mid \mathbb{R} - \text{חסום ב-} f(S)\}$

$\|f\|_\infty := \sup_{x \in S} |f(x)|$

2 מקרים פרטיים:

$l_\infty(\mathbb{N}) = l_\infty$, $S = \mathbb{N}$ (1) אז נקבל את

$S = \{1, 2, \dots, n\}$, אז נקבל את (\mathbb{R}^n, d_{max}) (2)

דוגמה: $X = (\mathbb{Z}, d_p)$ מ"מ לא שלם!

נניח עבור $p = 3$: $x_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}$

סדרת קושי שלא מתכנסת ב X (**פרטים בתרגול**).

הערה:

שתי תכונות מאוד חשובות של שלמות:

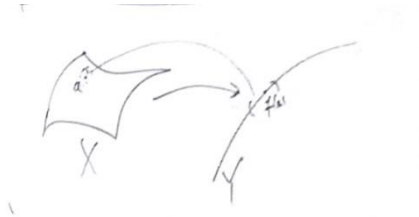
(1) שלמות נשמרת בקבוצות סגורות (אם מרחב הוא שלם, אז גם תת קבוצה סגורה שלו שלמה לגבי מטריקת הצמצום).

(2) נניח (Y, d_Y) תת מרחב מטרי של (X, d) . אז אם (Y, d_Y) שלם אז Y סגורה ב X .

רמז: תת קבוצה היא סגורה \Leftrightarrow היא "סגורה בנוגע להתכנסות".

פונקציות רציפות

הגדרה (רציפות): נניח (X, d) , (Y, ρ) מרחבים. פונקציה $f: X \rightarrow Y$ נקראת רציפה בנקודה $a \in X$ אם:



$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0: d(a, x) < \delta \Rightarrow \rho(f(a), f(x)) < \epsilon$$

f נקראת רציפה, כאשר f רציפה בכל נקודה $a \in X$.

נסמן: $f \in C(X, Y)$ אם $Y = \mathbb{R}$ אז נסמן: $f \in C(X)$.

הגדרה: אומרים ש- f רציפה במידה שווה (במ"ש) *uniformly continuous*

אם בבחירה של δ אין תלות ב a . ז"א

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta: d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow \rho(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$$

$$f \in UC(X, Y)$$

הגדרה: אומרים ש- f מקיימת תנאי ליפשיץ (Lipschitz) לגבי המקדם $c > 0$ אם:

$$\forall x_1, x_2 \in X: \rho(f(x_1), f(x_2)) \leq c \cdot d(x_1, x_2)$$

$$Lip(X, Y) = \cup_{c>0} Lip_c(X, Y)$$

$$f \in Lip_c(X, Y)$$

נסמן

$$Lip(X, Y) \subset UC(X, Y) \subset C(X, Y)$$

תמיד:

דוגמאות מאנליזה:

רציפה אבל לא במ"ש $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$

רציפה במ"ש אבל לא ליפשיץ $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt{x}$

הערה: כל שיוון איזומטרי פונקצית ליפשיץ עם מקדם 1 (אבל לא ההפך! תנו דוגמה).

סימון: אם קיימת איזומטריה, נסמנה $(X, d) \simeq (Y, \rho)$

זהו "יחס שקילות" באוסף Metr (מרחבים מטריים).

$$(1) (X, d) \simeq (X, d) \text{ (פ' הזהות).}$$

$$(2) (Y, \rho) \simeq (X, d) \Leftrightarrow (X, d) \simeq (Y, \rho) \text{ (פ' הופכית).}$$

$$(3) \begin{cases} (X_1, d_1) \simeq (X_2, d_2) \\ (X_2, d_2) \simeq (X_3, d_3) \end{cases} \Rightarrow (X_1, d_1) \simeq (X_3, d_3) \text{ (ההרכבה)}$$

דוגמאות:

$$(1) \text{ הזזה במרחב נורמי } T_v: E \rightarrow E \quad T_v(x) = v + x$$

תמיד איזומטריה (הוכחנן).

$$\text{תבדקו ש } T_v(B(0_E, r)) = B(v, r) \text{ לכן } \forall u, v \in E \quad B(v, r) \simeq B(u, r)$$

$$(2) (Lip_1(E, \mathbb{R}), \|\cdot\|) \ni f: E \rightarrow [0, \infty) \text{ כאשר } E \text{ מרחב נורמי.}$$

$$\| \|u\| - \|v\| \| \leq \|u - v\| \quad \text{הסבר:}$$

$$(3) f_A: X \rightarrow \mathbb{R} \ni f_A \in Lip_1(X, \mathbb{R}) \text{ המוגדרת ע"י: } f_A(x) = d(x, A)$$

$$\text{הסבר: שימוש באי שוויון } |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

משפט (עיקרון Heine): נניח $(X, d), (Y, \rho)$ מרחבים נתונים. אז עבור הפונקציה $f: X \rightarrow Y$ התנאים הבאים שקולים:

(1) f רציפה.

$$(2) f \text{ שומרת על התכנסות} \quad (x_n \xrightarrow{d} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(a)) \text{ כלומר,}$$

$$(3) \text{ המקור של קבוצה פתוחה גם פתוח} \quad (\forall O \in \text{top}(\rho): f^{-1}(O) \in \text{top}(d)) \text{ ז"א}$$

לפני ההוכחה קודם נדון כמה תוצאות.

משפט (השוואת טופולוגיות): נניח ש- d, ρ מטריקות על אותה קבוצה X . אז התנאים הבאים שקולים:

$$(1) \text{top}(\rho) \subseteq \text{top}(d)$$

$$(2) d \text{ דומיננטי ביחס ל } \rho \text{ ז"א } x_n \xrightarrow{d} a \Rightarrow x_n \xrightarrow{\rho} a$$

$$\text{הוכחה:} \text{ נגדיר את "פונקצית הזהות" } x \mapsto x \text{ } (X, d) \xrightarrow{id} (X, \rho)$$

נשתמש במשפט (עיקרון היינה).

כש $f = id$, אז $f^{-1}(0) = 0$. לכן תנאי 3 מעיקרון היינה יהיה –

$$\forall 0 \in \text{top}(\rho): 0 \in \text{top}(d)$$

$$\Rightarrow \text{top}(\rho) \subseteq \text{top}(d)$$

תנאי 2 בעיקרון היינה נותן לנו ישירות את התנאי השני במשפט שלנו.

■

תוצאה: התנאים הבאים שקולים:

$$(1) \text{top}(d) = \text{top}(\rho)$$

$$(2) \rho \sim d$$

הסבר: נובע מיד! שני כיוונים במשפט הקודם.

דוגמה:

$$\text{top}(d_{max}) = \text{top}(d) = \text{top}(d_1) \quad X = \mathbb{R}^n \quad (1)$$

$$d_{max} \sim d \sim d_1 \quad \text{כי}$$

$$\text{top}(d_1) \subsetneq \text{top}(d_{max}) \quad (a < b) \quad X = C[a, b] \quad (2)$$

• (מוכל) כי d_{max} דומיננטי ביחס ל- d_1 : $d_1 \leq (b - a)d_{max}$

לכן לפי משפט ההשוואה נקבל שיש הכלה של הטופולוגיות.

• (לא שווה) כעת, יש הכלה ממש כי קיימת סדרה f_n ב- $C[a, b]$ ($a < b$) וגם סדרה f

$$\text{ב- } C[a, b] \text{ כך ש } f_n \xrightarrow{d_1} f, f_n \xrightarrow{d_{max}} f$$

ראינו דוגמה בהרצאה ב- $[0, 1]$.

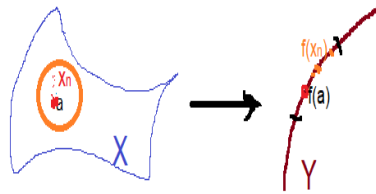
הרצאה 3

משפט (עיקרון Heine): נניח (X, d) , (Y, ρ) מרחבים נתונים. אז עבור הפונקציה $f: X \rightarrow Y$ התנאים הבאים שקולים:

(1) f רציפה.

(2) f שומרת על התכנסות (כלומר, $x_n \xrightarrow{d} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(a)$).

(3) המקור של קבוצה פתוחה גם פתוח (ז"א $\forall O \in \text{top}(\rho): f^{-1}(O) \in \text{top}(d)$)



הוכחה:

(2) \Leftarrow (1)

נתון ש $x_n \xrightarrow{d} a$ צ"ל - $f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(a)$.

f רציפה $\Leftarrow f$ רציפה בנקודה $a \in X$.

(הגדרת Cauchy) $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0: f(B_\delta(a)) \subseteq B_\epsilon(f(a))$.

לפי הגדרת התכנסות, כמעט כל האיברים של x_n נמצאים בכדור $B_\delta(a)$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: x_n \in B_\delta(a)$$

אז כמעט כל האיברים של הסדרה $f(x_n)$ נמצאים ב ϵ -סביבה: $B_\epsilon(f(a))$

לכן הוכחנו: $f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(a)$

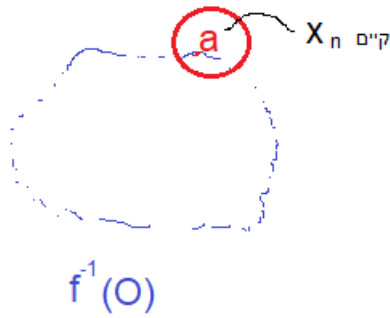
(3) \Leftarrow (2)

נניח בשלילה ש (3) לא מתקיים. ז"א:

$$\exists O \in \text{top}(\rho): f^{-1}(O) \notin \text{top}(d)$$

כלומר O פתוחה בעוד ש $f^{-1}(O)$ לא פתוחה ב (X, d) .

ז"א קיימת נקודה "לא פנימית" $\exists a \in f^{-1}(O): \forall \epsilon > 0 B_\epsilon(a) \not\subseteq f^{-1}(O)$



עבור כל $\epsilon := \frac{1}{n}$ קיים $x_n \in X$ כך ש

$$\begin{cases} x_n \in B_{\frac{1}{n}}(a) \\ x_n \notin f^{-1}(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d(a, x_n) < \frac{1}{n} \\ f(x_n) \neq 0 \end{cases}$$

מהשורה הראשונה נובע ש $d(a, x_n) < \frac{1}{n}$ ולכן $x_n \xrightarrow{d} a$.

על מנת לקבל סתירה, מספיק להוכיח $f(x_n) \not\xrightarrow{\rho} f(a)$.

$f(a) \in O \in \text{top}(\rho)$ וכן O פתוחה ולכן $f(a)$ נקודה פנימית ב O .

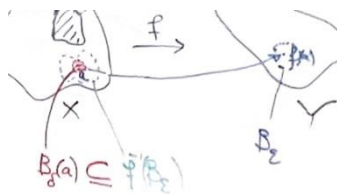
אז קיים $\epsilon > 0$ כך ש $B_\epsilon(f(a)) \subseteq O$

אבל מהשורה השנייה מקודם $f(x_n) \notin O$ ולכן $f(x_n) \notin B_\epsilon(f(a))$.

לכן $f(x_n) \not\xrightarrow{\rho} f(a)$.

(1) \Leftarrow (3)

בודקים את (1) -- רציפות "דרך כדורים".



לכל $\epsilon > 0$ נתון – $O = B_\epsilon(f(a)) \in \text{top}(\rho)$ (למדנו שכל כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה).

לכן בגלל (3) $f^{-1}(O) = f^{-1}(B_\epsilon(f(a))) \in \text{top}(d)$ גם פתוח.

אכן $a \in f^{-1}(O)$, ולכן a נקודה פנימית, אז קיים $\delta > 0$ כך ש –

$$B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(O)$$

$$\Rightarrow f(B_\delta(a)) \subseteq f(f^{-1}(O)) \subseteq O = B_\epsilon(f(a))$$

הערה: במשפט עקרון Heine (3 תנאים) אפשר להוסיף תנאי רביעי על קבוצות סגורות.

4) מקור של קבוצה סגורה הוא גם סגור.

הסבר מקוצר: $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$

A סגורה אם ורק אם A^c פתוחה.

ולכן (3) \Leftrightarrow (4).

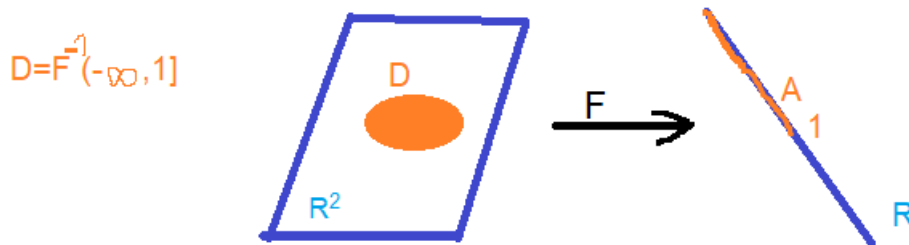


דוגמאות:

סגור ב- \mathbb{R}^2 $D := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}$ (1)

הסבר: $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad F(x, y) := \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$

רציפה (פונקציה פולינומיאלית!).



(2) כל מישור ב- \mathbb{R}^3 סגור. למשל -

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{2x + 3y - 4z + 5}_{F(x,y,z)} = 0 \right\}$$

סגור, כי את $D = F^{-1}(0)$ ניתן לכתוב כ- $\{0\}$ סגור ב- \mathbb{R} .

(3) בכל מ"מ (X, d) :

$$B_r[a] := \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}$$

$$S_r(a) := \{x \in X \mid d(a, x) = r\}$$

סגורות!

הסבר:

נגדיר פו' $f_a: X \rightarrow \mathbb{R}$, $f_a(x) = d(a, x)$. זוהי פונקציית ליפשיץ - $f_a \in Lip_1 \subset C(X)$.

$B_r[a] = f_a^{-1}(-\infty, r]$ גם סגור!

$S_r(a) = f_a^{-1}(\{r\})$ גם סגור!

(4) $B_r(a)$ פתוחה (באופן דומה).

$B_r(A) := \{x \in X \mid d(x, A) < r\}$ פתוחה.

כאן יש צורך בפונקציה ליפשיץ $f_A: X \rightarrow \mathbb{R}$, $f_A(x) = d(x, A)$.

(5) $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ מטריצות הפיכות, פתוחה במרחב של מטריצות ריבועיות.

$$Mat_n(\mathbb{R}) \stackrel{metr}{\simeq} \mathbb{R}^{n^2}$$

הגדרות: (X, d) מ"מ, $A \subseteq X$.

(א) "הסגור של A" (Closure of A):

$$A \stackrel{\subseteq}{\underset{m_1}{\bar{A}}} = cl(A) := \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$$

(ב) "סגור סדרתי" (sequential closure):

$$A \stackrel{\subseteq}{\underset{m_1}{scl(A)}} := \left\{ x \in X \mid \exists a_n \in A : x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right\}$$

סדרה קבועה
תמיד מתכנסת!

משפט 1: בכל מ"מ תמיד $scl(A) = cl(A)$.

הוכחה: (\subseteq) : נניח $z \in scl(A)$ אז

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists a_n \in A \\ z = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \end{array} \right.$$

$$d(z, a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow d(z, \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}) = 0$$

$$0 \leq d(z, A) \leq d(z, \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \Rightarrow d(z, A) = 0$$

$$\Rightarrow z \in cl(A)$$

(\supseteq)

$$z \in cl(A)$$

$$\Rightarrow \inf_{a \in A} d(z, a) = d(z, A) = 0$$

(לפי הגדרת inf) נקבל שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $a_n \in A$ כך ש

$$\forall n \in \mathbb{N}: 0 \leq d(z, a_n) \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$a_n \in A \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = z \in scl(A) \quad \text{מכאן}$$



משפט 2 (קריטריון סגירות במ"מ): נניח (X, d) מ"מ, $A \subseteq X$. התנאים הבאים שקולים:

$$(1) \quad A \text{ סגורה ב-} X \text{ (ז"א משלים לפתוחה).}$$

$$(2) \quad A = scl(A) \text{ (} A \text{ סגורה לגבי הגבולות).}$$

$$(3) \quad A = cl(A).$$

$$(4) \quad A \text{ "קבוצת אפסים" של פונ' רציפה (ז"א קיימת פ' רציפה } \mathbb{R} \xrightarrow{f} X \text{ כך ש- } A = f^{-1}(0)).$$

הוכחה:

$$(1) \Leftrightarrow (2):$$

נניח בשלילה ש- $A \neq scl(A)$.

אז (בגלל ש- $A \subseteq scl(A)$) קיימת נק' -

$$\begin{cases} z \in scl(A) \\ z \notin A \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \lim a_n, \exists a_n \in A \\ z \notin A \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \lim a_n, \exists a_n \in A \\ z \in A^c \end{cases}$$

A סגורה (נתון). ז"א A^c פתוחה!

ואז z נקודה פנימית של A^c .

$$\Rightarrow \exists r > 0: B_r(z) \subseteq A^c$$

אז אף איבר של הסדרה a_n לא נמצא בכדור $B_r(z)$ וזאת סתירה ל -

$$\begin{cases} z = \lim a_n \\ a_n \in A \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow (3): \text{ בגלל משפט 1.}$$

$$(3) \Leftrightarrow (4):$$

$$\text{נגדיר (רציפה!) } f_A: X \rightarrow \mathbb{R} \quad f_A(x) = d(x, A)$$

$$f_A^{-1}(0) = \{x \in X | f_A(x) = 0\} = \{x \in X | d(x, A) = 0\} = cl(A) \stackrel{\text{נתון 3}}{=} A$$

$$\text{ולכן } f_A^{-1}(0) = A.$$

$$(4) \Leftrightarrow (1): \text{ "תוספת למשפט Heine" (מקור לסגור גם סגור) } f_A^{-1}(0) \text{ מקור של נקודות.}$$



הגדרה: במ"מ (X, d) עבור $A \subseteq X$, נגדיר –

$$A' := \{x \in X \mid x \in cl(A \setminus \{x\})\} \stackrel{metr}{=} \{x \in X \mid x \in scl(A \setminus \{x\})\}$$

נקודות ההצטברות של A .

תרגיל: הוכיחו ש $z \in A'$ אם ורק אם קיימת סדרה ב A עם איברים שונים שמתכנסת ב X לנקודה z .

רמז: ראו בהרצאה 1 משפט (על נקודה מבודדת) הוכחה של כיוון שני. תשתמשו בעובדה ש $d(z, A \setminus \{z\}) = 0$ על מנת לבנות סדרה מבוקשת (במקום העובדה בטענה ש z לא מבודדת).

דוגמאות:

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R} \quad (1)$$

$$A' = \{0\}$$

$$A'' = \emptyset$$

$$A = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m} \right) \mid n, m \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}^2 \quad (2)$$

$$A' = \left\{ (0,0), \left(\frac{1}{n}, 0 \right), \left(0, \frac{1}{m} \right) \right\}$$

$$A'' = \{(0,0)\}$$

$$A''' = \emptyset$$

$$A = [0,1] \subset \mathbb{R} \quad (3)$$

אז

$$A' = A$$

תכונות (במ"מ): (לבדוק לבד!).

$$cl(A) = A \cup A' \quad (א)$$

$$A' \subseteq A \Leftrightarrow A \text{ סגורה} \quad (ב)$$

הגדרה: אומרים שתת קבוצה A ב- X היא:

(א) "**קבוצת G_δ** " אם A שווה לחיתוך בן מנייה של קבוצות פתוחות.

$$(ז"א $\exists O_n \in top(d), n \in \mathbb{N}: A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$)$$

(ב) "**קבוצת F_σ** " אם A שווה לאיחוד בן מנייה של קבוצות סגורות.

$$(ז"א $\forall n: P_n \text{ סגורה}, \exists P_n \subseteq X: A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$)$$

הערה: $A \in G_\delta \Leftrightarrow A^c \in F_\sigma$

תרגיל:

"בעזרת פונקציה רציפה" הוכיחו שבמרחב מטרי (X, d) :

(א) כל קבוצה סגורה היא G_δ .

(ב) כל קבוצה פתוחה היא F_σ

הגדרה: A נקראת קבוצה **סגורה** (clopen) אם $\begin{cases} A \text{ פתוחה} \\ A \text{ סגורה} \end{cases}$

דוגמאות:

(1) $A = (0,1)$ פתוחה ולא סגורה ב $X = \mathbb{R}$.

(2) $A = [0,1]$ סגורה ולא פתוחה ב $X = \mathbb{R}$.

(3) $A = [0,1)$ לא סגורה ולא פתוחה ב $X = \mathbb{R}$.

(4) \emptyset, \mathbb{R} סגורות ב \mathbb{R} .

הערה: לכל מרחב (X, d) – תת קבוצות \emptyset, X תמיד סגורות (כי $\emptyset = X^c, X = \emptyset^c$).

השאלה: מתי יש סגורות נוספות לא טריוויאליות?

הגדרה: מרחב (X, d) נקרא **קשיר** (connected) אם קבוצות סגורות במרחב הן רק \emptyset, X .

הגדרה שקולה להיות **לא קשיר**: אם קיים פירוק $X = X_1 \cup X_2$ כך ש –

$$\begin{cases} X_1 \neq \emptyset, X_2 \neq \emptyset \\ X_1, X_2 \in \text{top}(d) \text{ (פתוחות)} \\ X_1 \cap X_2 = \emptyset \end{cases} \text{ (שימו לב ש } X_1, X_2 \text{ סגורות לא טריוויאליות)}$$

למשל: אם $X = [2,4) \cup (5, \infty)$ ב \mathbb{R} כתת מרחב

אז X לא קשיר. שימו לב ש $(5, \infty)$ סגורה ב X (לא ב \mathbb{R}).

דומה עבור $[2,4)$ (למשל 2 נק' פנימית ב $[2,4)$ כי $(B_{\frac{1}{2}}(2) = [2, 2.5) \subseteq [2,4)$

עוד דוגמה: מרחב מטרי של רציונליים \mathbb{Q} (כתת מרחב בממשיים) לא קשיר.

יש אינסוף ת"ק סגורות ובהתאם יש אינסוף "פירוקים טופולוגיים". למשל:

$$\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$$

$$X_1 = (-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$$

$$X_2 = \mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, \infty)$$

תרגיל: הוכיחו שמרחב (\mathbb{Z}, d_p) (עם מטריקה p -אדית) כל כדור פתוח קבוצה סגורה. הסיקו ש (\mathbb{Z}, d_p) לא קשיר.

משפט: (תכונות בסיסיות של מרחב מטרי שלם)

(1) שלמות נשמרת בקבוצות סגורות

(אם מרחב הוא שלם, אז גם תת קבוצה סגורה שלו שלם כמת מ"מ).

(2) נניח (Y, d_Y) תת מרחב מטרי של (X, d) . אז אם (Y, d_Y) שלם אז Y סגורה ב X .

הוכחה: נניח (X, d) מ"מ ו (Y, d_Y) תת מרחב מטרי.

1. נניח y_n ס"ק ב (Y, d_Y) . אז היא ס"ק גם ב (X, d) (מדוע?). בגלל השלמות (X, d) יש גבול $y_n \xrightarrow{d} a \in X$. אז $a \in scl_X(Y)$. נתון ש Y סגורה ב X . לפי משפט על הסגירות במ"מ $scl_X(Y) = Y$. לכן $a \in Y$. אז $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a, y_n) = 0$. לכן גם $y_n \xrightarrow{d_Y} a \in Y$ (מדוע?).

2. נניח בשלילה ש Y לא סגורה ב X . אז לפי משפט על הסגירות יש סדרה $y_n \in Y$ כך ש $y_n \xrightarrow{d} a \in X$ $a \notin Y$. אז נניח y_n ס"ק ב (X, d) . להיות ס"ק תכונה תורשתית לכן גם ב (Y, d_Y) . בגלל השלמות של (Y, d_Y) קיים גבול $y_n \xrightarrow{d_Y} a \in Y$. אבל אז

גם $y_n \xrightarrow{d} a$. התקבלה סתירה. מכאן מש"ל ☺

הרצאה 4

השלמה של מרחב מטרי

הגדרה: השלמה של מ"מ (X, d) הוא

שיכון איזומטרי $M \xrightarrow{i} (X, d)$, כאשר M מ"מ שלם ומתקיים: $cl(i(X)) = M$.

הערה:

קל לבדוק שהסגור $cl(A)$ של A בכל מרחב הוא תמיד קבוצה סגורה.

(וזוה נכון אפילו למרחבים טופולוגיים, נוכיח בהמשך)

משפט (שיכון למרחב Banach): לכל מ"מ (X, d) קיים שיכון איזומטרי לתוך מרחב Banach.

הוכחה: למדנו על מרחב $(l_\infty(X), \|\cdot\|_{sup})$ Banach.

$$l_\infty(X) = \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ חסומה}\}$$

$$\|f\|_{sup} := \sup_{x \in X} |f(x)|$$

נראה כי ניתן לשכן את X לתוך $l_\infty(X)$:

נבחר $z \in X$ ונגדיר $\varphi: X \rightarrow l_\infty(X)$

$$a \mapsto \varphi(a) = \hat{a} \quad \hat{a}: X \rightarrow \mathbb{R} \quad \boxed{\hat{a}(x) = d(a, x) - d(z, x)}$$

$\hat{a} \in l_\infty(X)$, ז"א \hat{a} פונקציה חסומה כי

$$|\hat{a}(x)| = |d(a, x) - d(z, x)| \leq \underbrace{d(a, z)}_{\text{קבוע}}$$

$$\forall a, b \in X: \boxed{d(a, b) = \|\hat{a} - \hat{b}\|} \quad \text{מ"ל}$$

$$\begin{aligned} \|\hat{a} - \hat{b}\| &= \sup_{x \in X} |(d(a, x) - d(z, x)) - (d(b, x) - d(z, x))| = \\ &= \sup_{x \in X} |d(a, x) - d(b, x)| \leq d(a, b) \end{aligned}$$

מצד שני, אם נציב $x = b$ נקבל

$$\|\hat{a} - \hat{b}\| = \sup_{x \in X} |d(a, x) - d(b, x)| \geq \sup_{x \in X} |d(a, b) - 0| = d(a, b)$$

☺

משפט (השלמה): לכל מ"מ (X, d) יש השלמה.

הסבר ב 2 דרכים:

דבר 1: הוכחנו שלכל (X, d) קיים שיכון איזומטרי לתוך מרחב $Banach$

$$\varphi: X \rightarrow l_\infty(X)$$

$l_\infty(X)$ פונקציות חסומות וממשיות. $(l_\infty(X), \|\cdot\|_{sup})$ (מרחב $Banach$).

$$\overline{\varphi(X)} \subset l_\infty(X)$$

קבוצה סגורה במרחב שלם ולכן גם שלם.

$$X \xrightarrow{\varphi} \overline{\varphi(X)} = cl(\varphi(X))$$

☺

דבר 2: "דרך סדרות קושי" (הוכחה מקוצרת - רק שלבים בסיסיים). הוכחה מפורטת אפשר למצוא למשל בספר "טופולוגיה קבוצתית", ד. ליבוביץ (האוניברסיטה הפתוחה) חלק א.

הרעיון מאוד דומה להשלמה $\mathbb{Q} \xrightarrow{i} \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ של מרחב רציונליים. כשאנחנו מגדירים מספר ממשי כמחלקת שקילות של סדרות קושי ברציונליים.

שלב א': עבור מ"מ נתון (X, d) נגדיר קבוצה – $\tilde{X} := \{(X, d) \text{ סדרות קושי ב}\}$

נגדיר פסאודו-מטריקה באופן טבעי: לכל זוג של ס"ק $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \tilde{X}$

$$\tilde{d}(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \quad \text{נגדיר}$$

הגבול קיים כי מדובר על סדרות קושי וקל לבדוק ש $d(x_n, y_n)$ ס"ק ב \mathbb{R}

(רמז: שימו לב $|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n)$.)

לכן הסדרה $d(x_n, y_n)$ באמת מתכנסת ב \mathbb{R} כי \mathbb{R} שלם.

(\tilde{X}, \tilde{d}) מרחב פסאודו-מטרי.

שלב ב':

טענת עזר: (מרחב מטרי מושרה ע"י מרחב פסאודו-מטרי)

נניח (\tilde{X}, \tilde{d}) מרחב פסאודו-מטרי (כללי).

יוצרים ממנו מרחב מטרי מנה שמקבלים באופן הבא.

על מרחב פסאודו-מטרי (\tilde{X}, \tilde{d}) מגדירים יחס שקילות ("מרחק אפס"):

$$x \Omega y \stackrel{def}{=} \tilde{d}(x, y) = 0$$

נקבל קבוצת מנה: $M := \tilde{X}/\Omega = \{[x] \text{ מחלקות שקילות}\}$

$$[x] := \{y \in \tilde{X} \mid \tilde{d}(x, y) = 0\}$$

נגדיר ב M מרחק טבעי (דרך הנציגים): $\bar{d}([x], [y]) = \tilde{d}(x, y)$

אין תלות בנציגים וזאת באמת מטריקה. אז: (M, \bar{d}) מרחב מטרי,

הפונקציה $(\tilde{X}, \tilde{d}) \rightarrow (M, \bar{d}), x \mapsto [x]$ היא על ושומרת מרחקים.

נחזור למשפט. נפעיל "טענת עזר" על מרחב פסאודו-מטרי שלנו (\tilde{X}, \tilde{d}) של ס"ק.

נגדיר שיכון: $X \xrightarrow{i} M \quad x \mapsto [\tilde{x}]$

כאשר $\tilde{x} \in \tilde{X}$ סדרה קבועה \dots, x, x, x . אז מתקיימים תנאים הבאים:

i שיכון איזומטרי.

$$d(x, y) = \bar{d}([\tilde{x}], [\tilde{y}])$$

$$\overline{i(X)} = M$$

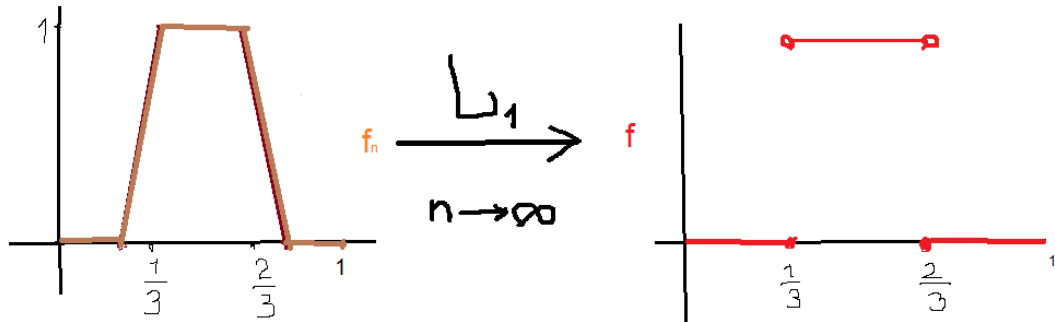
☺

(M, ρ) מרחב שלם.

דוגמה 1: $\mathbb{Q}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n = \overline{\mathbb{Q}^n}$

דוגמה 2: $(C[a, b], d_1) \xrightarrow[\text{השלמה}]{} L_1[a, b]$, כאשר $L_1[a, b]$ פונקציות אינטגרביליות.

$(C[a, b], d_1)$ לא שלם!



(f_n) ס"ק ב $(C[a, b], d_1)$ אבל לא מתכנסת ב $(C[a, b], d_1)$.

כן מתכנס במרחב (גדול יותר) $L_1[a, b]$:

כאשר: $E = \{f \mid \int_a^b |f| dx = 0\}$

\tilde{L}_1 מרחב פסאודו-נורמי! (אומרים יותר: סמי-נורמי). $L_1[a, b] = \tilde{L}_1 / E$ מרחב המנה והוא מרחב בנך של פונקציות אינטגרביליות על $[a, b]$.

(3) $(C[a, b], d_2) \xrightarrow[\text{השלמה}]{} L_2[a, b]$ מקבלים מרחב הילברט פונקציונלי.

תזכורת: $X = (\mathbb{Z}, d_p)$ מ"מ לא שלם! (היה בתירגול)

למשל עבור $p = 3$: $x_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}$

סדרת קושי שלא מתכנסת ב X .

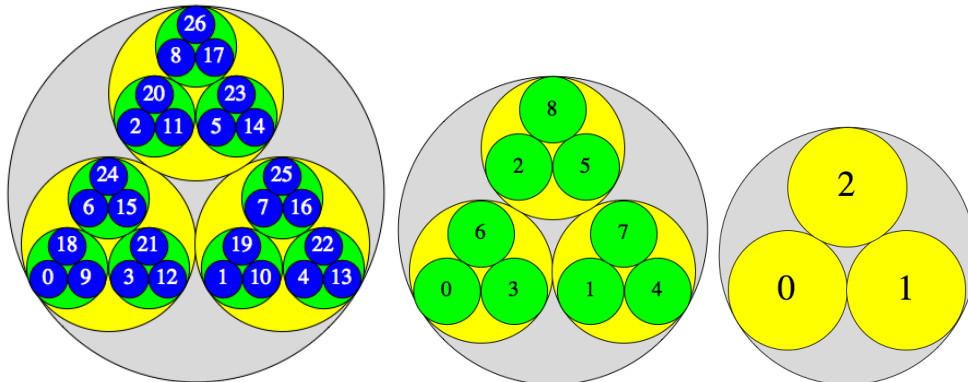
דוגמה 4: $(\mathbb{Z}, d_p) \hookrightarrow (\overline{\mathbb{Z}}, \overline{d_p})$ כאשר: השלמה היא

$$\overline{\mathbb{Z}} = \{ \text{שלמים } p\text{-אדיים} \} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} b_k p^k, b_k \in \underbrace{\{0, 1, \dots, p-1\}}_{\text{שאריות מודולו } p} = \mathbb{Z}_p \right\}$$

שהוא קומפקטי (ולכן גם שלם) ! בעצם זאת חבורה טופולוגית קומפקטית.

שאלה: א. כיצד אפשר לדמיין את האיברים של ההשלמה $(\overline{\mathbb{Z}}, \overline{d_3})$ לפי התמונות הבאות ?

ב. בתרגול הראשון למדתם על האולטרה מטריקה של מרחק בין מילים, מה הקשר?



.....

מרחבים טופולוגיים

הגדרה: תהי X קבוצה לא ריקה. אוסף תת הקבוצות $\tau \ni \{A | A \subseteq X\}$ נקרא **טופולוגיה על קבוצה X** אם מתקיימים התנאים הבאים:

$$t_1 \quad \emptyset, X \in \tau$$

$$t_2 \quad (O_1, O_2, \dots, O_n) \in \tau \iff O_i \in \tau \text{ עבור } i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ (\text{מספיק עבור } n = 2)$$

$$t_3 \quad (O_i)_{i \in I} \in \tau \iff O_i \in \tau \text{ עבור } i \in I$$

אם מתקיימים הנ"ל, אז נאמר ש- (X, τ) הוא **מרחב טופולוגי** (Topological space) ונרשום בקיצור מ"ט.

הגדרות נוספות:

(א) אומרים ש- $X \supseteq A$ היא תת קבוצה **פתוחה** (במ"ט (X, τ)) אם

$$\boxed{A \text{ פתוחה} \stackrel{def}{=} A \in \tau}$$

(ב) תת קבוצה $X \supseteq A$ נקראת קב' **סגורה** (במ"ט (X, τ)) אם המשלים קבוצה פתוחה, ז"א

$$\boxed{A^c \text{ פתוחה} \stackrel{def}{=} A \text{ סגורה}}$$

דוגמאות:

(1) לכל מרחב פסאודו-מטרי (X, d) : $(X, top(d))$ מרחב טופולוגי (לבדוק!).

$$\text{כאשר } top(d) = \{ \text{קבוצות פתוחות במובן } d \}$$

הגדרה: אומרים שמ"ט (X, τ) הוא **מטריזבילי** אם קיימת מטריקה d כך ש $\tau = top(d)$

באופן דומה אפשר להגדיר: מרחב טופולוגי **פסאודו-מטריזבילי**

משפט (תכונות בסיסיות של קבוצות סגורות): לכל מ"ט (X, τ) מתקיים:

$$t_1^c \quad X, \emptyset \text{ סגורות.}$$

$$t_2^c \quad \text{איחוד סופי של קבוצות סגורות הוא סגור.}$$

$$t_3^c \quad \text{כל חיתוך קב' סגורות שוב סגור.}$$

הוכחה: כללי $de Morgan$ \wedge הגדרת TOP .

הגדרה: קבוצה סגורה = סגורה+פתוחה.

(2) "טופולוגיה טריוויאלית": $\tau_{tr} := \{\emptyset, X\}$. **מרחב טריוויאלי.**
הערה: מ"ט (X, τ_{tr}) תמיד פסאודו-מטריזבילי: כי $\tau_{tr} = top(d_0)$ כאשר $d_0(x, y) = 0$.

(3) "טופולוגיה דיסקרטית": $\tau_{discr} := P(X) = \{X - \text{תת קבוצות ב-} X\}$
(כאן כל תת קבוצה היא פתוחה, בעצם סגורה)
שימו לב: בין היתר, כל נקודון $\{x\}$ קבוצה פתוחה (שקול לדיסקרטיות בגלל t_3).

הגדרה: נקודה a במרחב טופולוגי (X, τ) נקראת **מבודדת** (*isolated*) אם $\{a\} \in \tau$ (נקודון פתוח!).

לכן: מרחב טופולוגי הוא דיסקרטי \Leftrightarrow כל נקודה מבודדת בו.

הערה: מרחב דיסקרטי הוא תמיד מטריזבילי. $\tau_{discr} = top(d_\Delta)$ (מטריקת 0-1).

הערה: לכל טופולוגיה τ מתקיים: $\{\emptyset, X\} = \tau_{tr} \subseteq \tau \subseteq \tau_{discr} = P(X)$

הגדרה: נניח $\tau_1 \subseteq \tau_2$ 2 טופולוגיות על אותה קבוצה X . אז אומרים ש- τ_2 **חזקה יותר** מ- τ_1 , ואומרים ש- τ_1 **חלשה יותר** מ- τ_2 .

(4) $X = \{0,1\}$ ונגדיר – $\tau_* := \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$ טופולוגיית Sierpinski
 $\{0\}$ מבודדת, $\{1\}$ **לא**. מה הן קבוצות סגורות? סגוחות?

הגדרה (תת מרחב טופולוגי): יהי $(X, \tau) \in TOP$, $\emptyset \neq Y \subseteq X$.

מגדירים **טופולוגיית תת מרחב** מעל Y : $\tau_Y := \{O \cap Y \mid O \in \tau\}$

תבדקו ש $TOP \ni (Y, \tau_Y)$

הערה: $(X, d) \mapsto (X, top(d))$, $TOP = \{topological spaces\}$, $\{metric spaces\} = Metr \rightarrow TOP$

(א) לא על.

(ב) לא חח"ע.

הסבר ב': (שקילות טופולוגית של מטריקות)

הסבר א': שקול להגיד: שלא כל מ"ט הוא מטריזבילי.

דוגמה:

- מ"ט טריוויאלי (X, τ_{tr}) עם X לא נקודון--- לא מטריזבילי (אבל פסאודו-מטריזבילי).
- $X := \{0,1\}$ (X, τ_*) מ"ט אבל לא מטריזבילי (אפילו לא פסאודו-מטריזבילי!).

$$\tau_* = \left\{ \underbrace{\{\emptyset, \{0,1\}, \{1\}\}}_{\text{סגורות}}, \underbrace{\{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}}_{\text{פתוחות}} \right\}$$

הסבר:

הסבר קצר שהמרחב לא מטריזבילי: $(\{0,1\}, \tau_*) \notin \text{Metriz}$

נקודון $\{0\}$ לא קבוצה סגורה! מצד שני, בכל מ"מ, כל נקודון סגור!

נוכיח יותר: ש- $(\{0,1\}, \tau_*)$ לא פסאודו-מטריזבילי. נניח בשלילה שכן ...

נניח בשלילה שיש פסאודו-מטריקה ρ על $\{0,1\}$ כך ש- $\text{top}(\rho) = \tau_*$.

2 מקרים:

(1) $\rho(0,1) = 0$ ואז $\rho = d_0$. מצד שני, $\text{top}(d_0) = \{\emptyset, \{0,1\}\} \neq \tau_*$.

(2) $\rho(0,1) > 0$. כאן - $\text{top}(\rho) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\} \neq \tau_*$.

כי כל הנק' מבודדות ולכן המרחב הוא דיסקרטי.

(5) "טופולוגיה קו-סופית":

לכל קב' $X \neq \emptyset$ נגדיר - $\tau_{cof} := \{F^c \mid F \subseteq X \text{ סופית}\} \cup \{\emptyset\}$

שאלה: מה הן קבוצות סגורות? סגוחות?

לבדוק: (X, τ_{cof}) מ"ט אבל לא תמיד מטריזבילי (תלוי בעוצמה של X).

$(\mathbb{R}, \tau_{cof}) = \{F^c \subseteq \mathbb{R} \mid F \subset \mathbb{R} \text{ סופית}\} \cup \{\emptyset\} \notin \text{Metriz}$

רמז: לנקודות שונות אין "סביבות" פתוחות זרות.

הגדרות:

יהי (X, τ) מ"ט.

(1) תת קבוצה $V \subseteq X$ נקראת **סביבה לנק' $a \in X$** אם קיימת קבוצה פתוחה O ($\tau \ni O$)

כך ש- $a \in O \subseteq V$.

נסמן $N(a)$ כאשר $V \in N(a)$, סביבות של a .

אומרים **סביבה פתוחה** אם V פתוחה.

אזהרה: **סביבה** לא חייבת להיות פתוחה.

(2) באופן דומה נגדיר **סביבה V לתת קבוצה $A \subseteq X$** אם

$$\exists O \in \tau: A \subseteq O \subseteq V$$

3) אומרים שנקודה a היא **נק' פנימית** של קבוצה $A \subseteq X$ אם $A \in N(a)$.

הסימון: $a \in A^\circ$ או $a \in \text{int}(A)$.

בעצם זה מגדיר את ה"פנים" של $A: \text{int}(A)$ (כאוסף של נקודות פנימיות).

הערה: תמיד $\text{int}(A) \subseteq A$.

טענה: $\text{int}(A) = A \iff A$ פתוחה ($A \in \tau$).

קריטריון לפתיחות

$$\dots A = \bigcup_{a \in A} O_a \in \tau \quad \text{הסבר: שימוש ב } t_3$$

הערה חשובה: הרבה הגדרות במ"ט מתקבלות מהגדרות על מ"מ כשמחליפים ε -סביבות בסביבות. למשל: התכנסות סדרות, רציפות פונקציות, ...

הגדרה: התכנסות סדרות

$$n \mapsto f(n) = x_n \quad \mathbb{N} \xrightarrow{f} X$$

לסדרה x_n במ"ט (X, τ) מגדירים גבול (אם קיים!) באופן הבא:

אומרים ש- $a \in X$ **גבול** של סדרה $x_n \in X$ אם לכל סביבה (פתוחה) U של a

כמעט כל האיברים נמצאים בסביבה U . ז"א

$$(n_0 \text{ תלוי בסביבה } U) \quad \forall U \in N(a) \exists n_0 \in \mathbb{N}: n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in U$$

$$\text{סימון: } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{או} \quad x_n \xrightarrow{\tau} a$$

הגדרה: רציפות פונקציות

נייח $(X, \tau), (Y, \sigma)$ מ"ט. פונקציה $f: X \rightarrow Y$ נקראת רציפה בנקודה $a \in X$ אם:

$$\forall U \in N(f(a)) \exists V \in N(a) \quad f(V) \subseteq U$$

אומרים רציפה אם היא רציפה בכל נקודה $a \in X$. סימון: $f \in C(X, Y)$.

הערה: (כמו במ"מ) פונקציה $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ בין 2 מ"ט רציפה אם

$$\boxed{\forall O \in \sigma: f^{-1}(O) \in \tau}$$

ז"א מקור לפתוח הוא פתוח (ניתן לנסח עבור סגור).

תרגיל: הוכיחו ש $f: X \rightarrow Y$ רציפה בכל נקודה $a \in X$ אם"ם $f^{-1}(O) \in \tau$ $\forall O \in \sigma$.

הגדרה: X מקיימת **תכונת Hausdorff** (סימון נוסף: תכונת T_2), כלומר: $X \in T_2$

אם לכל 2 נקודות שונות יש סביבות (פתוחות) זרות.
בה"כ

משפט: (יחידות הגבול) במרחב טופולוגי (X, τ) עם תכונה T_2 (Hausdorff), גבול של סדרה תמיד יחיד, אם קיים.

הוכחה: נניח בשלילה ש $\begin{cases} a \neq b \\ X \in T_2 \end{cases}$

\Leftarrow קיימות **סביבות זרות** $U \in N(a), V \in N(b)$ כך ש $U \cap V = \emptyset$.

U מכיל כמעט כל האיברים של הסדרה x_n , וגם V מכיל כמעט כל האיברים של הסדרה ...

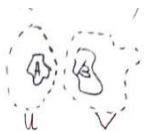
סתירה! ☺

אקסיומות הפרדה נוספות:

הגדרות: נניח $A \subseteq X, B \subseteq X$. אומרים:

(א) קיימת **הפרדה סביבתית** של A, B (במ"ט (X, τ)) אם

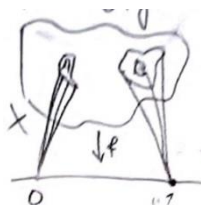
$$\exists U \in N(A), V \in N(B): U \cap V = \emptyset$$



(ז"א אם קיימות סביבות (פתוחות) זרות).
בה"כ

(ב) קיימת **הפרדה פונקציונלית** במובן Urysohn אם:

$$\exists f \in C(X, [0,1]): f(A) = 0, f(B) = 1$$



טענה: מהפרדה פונקציונלית נובעת מהפרדה סביבתית.

הוכחה: ניקח סביבות פתוחות זרות של $0, 1$ ב- $[0,1]$.

$$U := \underbrace{\left[0, \frac{1}{3}\right)}_{0 \in} \cap V := \underbrace{\left(\frac{2}{3}, 1\right]}_{1 \in} = \emptyset$$

$$\underbrace{f^{-1}(U)}_{\in N(A)} \cap \underbrace{f^{-1}(V)}_{\in N(B)} = \emptyset$$

ומצאנו הפרדה סביבתית של A, B . ☺

הגדרה: X מקיימת **תכונת T_0** , כלומר: $(X, \tau) \in T_0$ (Kolmogorov) – אם לכל 2 נקודות שונות $a \neq b$ מתקיים לפחות אחד מהתנאים הבאים:

$$\exists U \in N(a): b \notin U \quad (1)$$

או

$$\exists V \in N(b): a \notin V \quad (2)$$

הגדרה: X מקיימת **תכונה T_1** ,

כלומר: $X \in T_1$ אם מתקיימים שתי התנאים מקודם (1) **וגם** (2).

תרגיל: התנאים הבאים שקולים:

$$X \in T_1 \quad (1)$$

(2) כל נקודון סגור.

(3) כל תת קבוצה סופית F היא סגורה. (רמז: (t_2^c))

הערה: תמיד $(X, \tau_{cof}) \in T_1$, בעצם τ_{cof} טופולוגיה הכי קטנה על X שמקיימת את תכונה T_1 .

הגדרה (תזכורת): X מקיימת **תכונת Hausdorff** (סימון נוסף: תכונת T_2),

אם לכל 2 נקודות שונות יש סביבות (פתוחות) זרות.
בה"כ

הגדרה: X מקיימת **תכונת T_3** , כלומר: $X \in T_3$, אם מתקיימים שני תנאים:

$$X \in T_1 \quad (א)$$

(ב) לכל נק' a ולכל קבוצה סגורה $a \notin B$ יש הפרדה סביבתית. רמז: ניקח נקודון $B := \{b\}$

אומרים גם: $Regular\ spaces = T_3$ (ולעיתים רק תנאי (ב) $Regular = T_3$)

הערה: $T_3 \subset T_2 \subset T_1 \subset T_0$

הגדרה: X מקיימת **תכונת $T_{3\frac{1}{2}}$** , כלומר: $X \in T_{3\frac{1}{2}}$, אם:

(א) $X \in T_1$.

(ב) לכל נק' a ולכל קבוצה סגורה $a \notin B$ קיימת הפרדה פונקציונלית.

הערות:

- מהטענה $T_3 \supset T_{3\frac{1}{2}} \Leftarrow$
- $T_{3\frac{1}{2}}$ אומרים גם תכונת Tychonoff או רגולרי לחלוטין
- (לעיתים רק על $T_{3\frac{1}{2}}$ (ב) אומרים – Completely Regular = רגולרי לחלוטין).

הגדרה: X מקיימת **תכונת T_4** , כלומר: $X \in T_4$, אם:

(א) $X \in T_1$.

(ב) לכל 2 קבוצות סגורות וזרות $A \cap B = \emptyset$, יש סביבות (פתוחות) זרות.

(כלומר $(\exists U \in N(A), \exists V \in N(B): U \cap V = \emptyset$)

הערות:

- לעיתים אומרים $Normal Space$ = מרחב נורמלי.
- (ולעיתים אומרים נורמלי על T_4 בלבד)
- לא קל להבין מדוע $X \in T_4 \Rightarrow X \in T_{3\frac{1}{2}}$

נובע מהמשפט הבא:

משפט Urysohn: יהי $X \in T_4$. אז לכל זוג A, B קבוצות סגורות זרות קיימת הפרדה פונקציונלית של A, B .

החלק הלא טריוויאלי בהוכחה נובע מ "Onion Argument" of Urysohn

$$TOP \supset T_0 \supset T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset T_{3\frac{1}{2}} \supset T_4 \supset Metrizable$$

Spoiler: בהמשך נוכיח $T_4 \supset Metrizable$, $T_4 \supset Comp \cap T_2$, וגם את משפט Urysohn.

הערה: לכל ההכלות הנ"ל, יש דוגמאות נגדיות (הן הכלות **ממש**).

ראו קובץ באתר של המרצה - Separation Axioms

$$(\{0,1\}, \tau_{tr}) \in Top \quad (1)$$

$$(\{0,1\}, \tau_{tr}) \notin T_0$$

$$(1 \notin \{0\}) \in N(0) \quad \text{כי} \quad (\{0,1\}, \tau_*) \in T_0 \quad (2)$$

$$(\{0\} \text{ לא סגור}) \quad (\{0,1\}, \tau_*) \notin T_1$$

$$(X \setminus \{a\} \in \tau_{cof} \text{ סגור כי } (\mathbb{R}, \tau_{cof}) \in T_1) \quad (3)$$

$$(\mathbb{R}, \tau_{cof}) \notin T_2$$

תזכורת: $\tau_{cof} := \{F^c \mid F \subseteq \mathbb{R} \text{ סופית}\} \cup \{\emptyset\}$

הערה: $(X, \tau_{cof}) \notin T_2$ לכל X אינסופית.

בעצם זה לכל 2 קבוצות פתוחות לא ריקות.

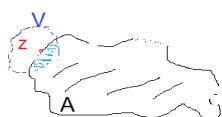
$U, V \in \tau_{cof}$ מתקיים $U \cap V \neq \emptyset$ כי $U := F_1^c, V := F_2^c$

$$\emptyset \stackrel{\text{אם נניח}}{=} U \cap V = F_1^c \cap F_2^c = (F_1 \cup F_2)^c$$

$$X = \underbrace{F_1 \cup F_2}_{\text{סופית}} \quad \text{אז}$$

בסתירה! ☺

הגדרה: הסגור - closure: עבור $A \subseteq X$ נגדיר



$$z \in cl(A) = \bar{A} \stackrel{def}{=} \forall V \in N(z): V \cap A \neq \emptyset$$

$cl(A)$ "הנקודות הכי קרובות" ל A .

הערה: תמיד $A \subseteq cl(A)$.

תרגיל: $A \text{ סגורה} \Leftrightarrow A = cl(A)$.

הגדרה: $A \subseteq X$. נגדיר את הסגור הסדרתי לפי:

$$z \in scl(A) \stackrel{def}{=} \exists a_n \in A: a_n \xrightarrow{\tau} z$$

• **טענה:** במ"ט תמיד $A \subseteq scl(A) \subseteq cl(A)$.

הוכחה: הכלה הראשונה נובעת מזה שסדרות קבועות תמיד מתכנסות.

נניח $z \in scl(A)$. אז קיימת סדרה $a_n \in A$ שמתכנסת (במרחב X) ל z .

לכל סביבה $U \in N(z)$ כמעט כל האיברים של a_n נמצאים ב U . אז ברור $U \cap A \neq \emptyset$.

לכן $z \in cl(A)$. זה מוכיח $scl(A) \subseteq cl(A)$.

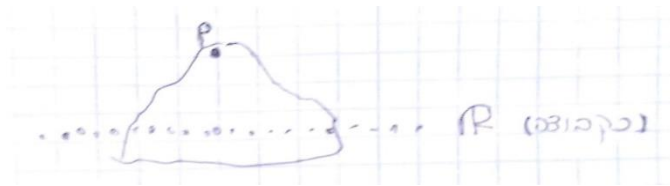
☺

הרצאה 5

שאלה: א. למצוא מי"ט (X, τ) שבו **לא תמיד** $scl(A) = cl(A)$ (ואז (X, τ) לא מטריזבילי).
 ב. אותה שאלה אבל בתנאי נוסף ש $(X, \tau) \in T_2$.

דוגמה א: (\mathbb{R}, τ_{coc}) $\tau_{coc} := \{Y^c \subseteq \mathbb{R} : |Y| \leq \aleph_0\} \cup \{\emptyset\}$
 $[0,1] = scl([0,1]) \neq cl([0,1]) = \mathbb{R}$

דוגמה ב: נגדיר $X := \mathbb{R} \cup \{p\}, p \notin \mathbb{R}$
 $\tau := \{O \subseteq X \mid p \in O \Rightarrow |O^c| \leq \aleph_0\}$



ז"א אם $p \in O$, אז המשלים O^c הוא בן מנייה. נשים לב ש- $\{x\} \in \tau, \forall x \neq p$.

לבדוק:

- $(X, \tau) \in TOP$. לבדוק גם T_2 .
- τ לא דיסקרטית (נק' p לא מבודדת).
- תת מרחב טופולוגי $Y := (\mathbb{R}, \tau_Y)$ של מי"ט הנ"ל הוא \mathbb{R} עם טופולוגיה דיסקרטית. ז"א $\tau_Y = P(\mathbb{R}) = \tau_{discr}$.
- לבדוק $\mathbb{R} = scl(\mathbb{R}) \neq cl(\mathbb{R}) = X$
- אם סדרה a_n מתכנסת ב (X, τ) אז היא קבועה לבסוף
- $id : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau_{discr})$ שומרת על התכנסות סדרות אבל לא רציפה!
- **מסקנה: עיקרון Heine כאן לא מתקיים!**
- $(X, \tau) \notin Metrizable$.

תכונות $(\delta, \text{int}, \text{cl})$ (סביבות): במ"ט (X, τ)

$$(1) \quad (\text{רמז: } t_1) \quad \forall a \in X: X \in N(a)$$

(2) חיתוך סופי של סביבות (פתוחות) גם סביבה (פתוחה). t_2 : רמז.

$$(3) \quad V \in N(a) \Leftrightarrow \begin{cases} U \in N(a) \\ V \supseteq U \end{cases}$$

$$(4) \quad \boxed{\text{int}(A) \subseteq A \subseteq \text{cl}(A)}$$

$$\underbrace{\text{int}(A)}_{A^\circ} \quad \underbrace{\text{cl}(A)}_{\bar{A}}$$

(5) לכל $A_1 \subseteq A_2$ מתקיים:

$$\text{int}(A_1) \subseteq \text{int}(A_2)$$

$$\text{cl}(A_1) \subseteq \text{cl}(A_2)$$

$$\text{scl}(A_1) \subseteq \text{scl}(A_2)$$

(6) קריטריון לפתיחות: $\boxed{\text{int}(A) = A \Leftrightarrow A \text{ פתוחה}}$

$$A = \bigcup_{a \in A} O_a \quad t_3: \text{רמז}$$

(7) קריטריון לסגירות: $\boxed{\text{cl}(A) = A \Leftrightarrow A \text{ סגורה}}$

$$(8) \quad A^\circ = A^\circ \quad (\text{ז"א: } \text{int}(\text{int}(A)) = \text{int}(A))$$

(9) $A^\circ \in \tau$ (ז"א A° תמיד פתוחה).

$$(10) \quad \boxed{(A_1 \cap A_2)^\circ = A_1^\circ \cap A_2^\circ} \quad (\text{לכל מספר סופי}).$$

(11) $A^\circ =$ קב' פתוחה הכי גדולה בין תת קבוצות פתוחות של A , כלומר –

$$\bigcup \{O \subseteq X \mid O \subseteq A, O \in \tau\}$$

$$(12) \quad \bar{\bar{A}} = \bar{A} \quad (\text{ז"א } \text{cl}(\text{cl}(A)) = \text{cl}(A))$$

(13) \bar{A} תמיד קב' סגורה.

(14) $\bar{A} =$ קב' סגורה הכי קטנה בין קבוצות סגורות שמכילות את A . כלומר

$$\bigcap \{B \subseteq X \mid B \supseteq A, B \text{ סגורה ב-} X\}$$

(15) (הפרשים) נניח O פתוחה, B סגורה. אזי:

א. $O \setminus B$ פתוחה. ב. $B \setminus O$ סגורה.

הסבר: $O \setminus B = O \cap B^c$ $B \setminus O = B \cap O^c$

(16) **משפט הקשר** בין הסגור והפנים. תמיד מתקיים:

א. $cl(A^c) = (int(A))^c$

ב. שקול: $int(A^c) = (cl(A))^c$

הוכחה: א \Leftrightarrow ב כי נוכל להציב $A := A^c$ מ"ל (א)

$x \in (int(A))^c$

\Downarrow

$x \notin int(A)$

\Downarrow

$\forall U \in N(x) : U \not\subseteq A$

\Downarrow

$\forall U \in N(x) : U \cap A^c \neq \emptyset$

\Downarrow

$x \in cl(A^c)$

\odot

(17) $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$ (לכל מס' סופי).

הגדרה: השפה של A : $\partial(A) := \overline{A} \setminus A^\circ$

(18) $\partial(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}$

הסבר: $\partial(A) = \overline{A} \setminus A^\circ = \overline{A} \cap (A^\circ)^c \stackrel{16.1}{=} \overline{A} \cap \overline{A^c}$

(19) $\partial(A)$ תמיד סגורה!

הסבר: כחיתוך של קבוצות סגורות (ראו 18).

(20) $\partial(A) = \partial(A^c)$

(21) $\partial(A) = \{x \in X \mid d(x, A) = 0, d(x, A^c) = 0\}$ (במ"מ (X, d))

הסבר: תכונות הסגור במ"מ...

(22) $int(A) = A \setminus \partial(A)$ $cl(A) = A \cup \partial(A)$

הגדרה: תת קבוצה A במ"ט (X, τ) נקראת **צפופה** אם $cl(A) = X$.

שקול: (קריטריון צפיפות) לכל קבוצה פתוחה לא ריקה O מתקיים $A \cap O \neq \emptyset$.

תרגיל: אם A צפופה ב X אז לכל קבוצה פתוחה O מתקיים:

$$cl(O) = cl(O \cap A)$$

הגדרה: מ"ט (X, τ) נקרא **ספרבילי** אם קיימת ת"ק צפופה ו**בת מניה**.

סימון: $(X, \tau) \in Sep$.

הערה: תמיד $cl(X) = X$. לכן תמיד X צפופה ב X . לכן מרחב טופולוגי בת מניה תמיד ספרבילי.

הערה: (משפט Weierstrass)

$$(C[a, b], top(d_{max})) = cl(P_{\mathbb{Q}}[a, b]) = \{\text{פולינומים רציונליים}\}$$

לכן $(C[a, b], top(d_{max})) \in Sep$.

תרגילים מומלצים:

- $\mathbb{R}^n \in Sep$
- הוכיחו: $l_2 \in Sep$ (רמז: $A := \{(q_1, q_2, \dots) \in l_2 : q_k \in \mathbb{Q}, \exists n \forall i > n q_i = 0\}$)
- $(X, \tau_{discr}) \in Sep$ אם ורק אם X בת מניה.
- חיתוך של 2 (או מספר סופי) קבוצות פתוחות צפופות גם צפופה.
- יהי (X, d) מ"מ. תת קבוצה צפופה ב $(X, top(d))$ אם ורק אם היא ε -צפופה לכל $\varepsilon > 0$.

הגדרה: A ε -צפופה ב (X, d) אם לכל $x \in X$ קיים $a \in A$ כך ש $d(x, a) < \varepsilon$.

$$\bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon) = X \quad \text{שקול}$$

* הוכיחו: $l_{\infty} \notin Sep$

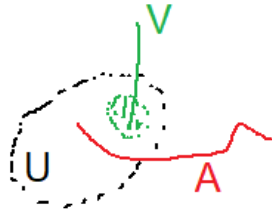
הגדרה: תת קבוצה A במ"ט X נקראת **דלילה** (nowhere dense) אם $int(cl(A)) = \emptyset$.

למשל: קו ישיר דליל במישור. מישור דליל במרחב תלת ממדי.

נקודון במרחב מטרי דליל אם ורק אם היא לא מבודדת.

משפט: (קריטריונים לקבוצות דלילות) התנאים הבאים שקולים:

- א. A דלילה במ"ט X (ז"א $\text{int}(cl(A)) = \emptyset$).
- ב. $X \setminus cl(A)$ צפופה ב X .
- ג. $cl(A)$ לא מכיל אף תת קבוצה פתוחה לא ריקה.
- ד. לכל קבוצה פתוחה לא ריקה U קיימת קבוצה פתוחה V כך ש:
 $\emptyset \neq V \subseteq U$ $V \cap A = \emptyset$.



הוכחה:

$\text{א} \Leftarrow \text{ב}$

$$\text{int}(cl(A)) = \emptyset$$

$$X \setminus \text{int}(cl(A)) = X$$

מכאן, לפי משפט הקשר, נקבל

$$cl(X \setminus cl(A)) = X$$

$\text{ב} \Leftarrow \text{ג}$

נניח בשלילה שקיימת ק"פ $\emptyset \neq O \subseteq cl(A)$. אז $O \cap (X \setminus cl(A)) = \emptyset$. מכאן $X \setminus cl(A)$ לא צפופה ב X (ראו קריטריון צפיפות).

$\text{ג} \Leftarrow \text{ד}$

נניח בשלילה שקיימת ק"פ $\emptyset \neq U$ כך שלכל ת"ק פתוחה $\emptyset \neq V \subseteq U$ מתקיים $V \cap A \neq \emptyset$

אז כל נקודה של U היא נקודת סגור של A . זאת אומרת $U \subseteq cl(A)$. סתירה לתנאי ג.

$\text{ד} \Leftarrow \text{א}$

נניח בשלילה שלא. אז $U := \text{int}(cl(A)) \neq \emptyset$. לכל ת"ק פתוחה $\emptyset \neq V \subseteq U$ מתקיים $\emptyset \neq V \subseteq \text{int}(cl(A)) \subseteq cl(A)$. אבל אז לפי הגדרת סגור $V \cap A \neq \emptyset$. סתירה לתנאי ד.



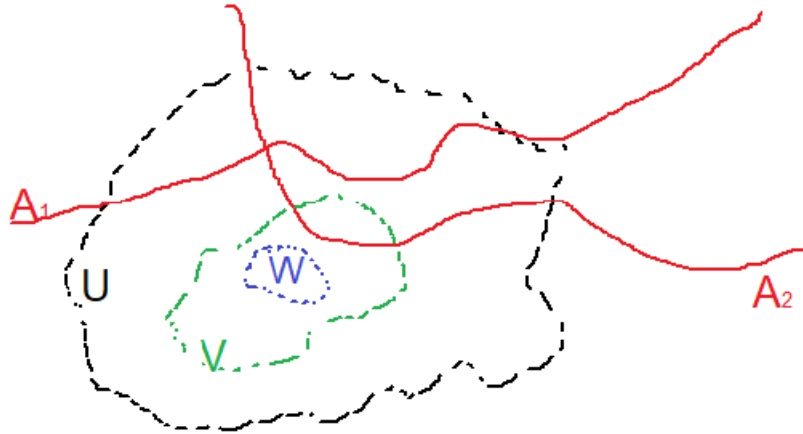
תרגילים מומלצים:

1. A דלילה ב X אם ורק אם $cl(A)$ דלילה ב X .
2. אם A דלילה ב X אז A^c צפופה ב X .
3. איחוד בן מניה של קבוצות דלילות לא תמיד קבוצה דלילה.

טענה: איחוד סופי של קבוצות דלילות גם קבוצה דלילה.

הוכחה:

נניח A_1, A_2 דלילות ב X . צ"ל $A_1 \cup A_2$ דלילה ב X .



נשתמש בסעיף ד של המשפט.

נניח U פתוחה לא ריקה. A_1 דלילה ב X . לכן קיימת ק"פ V כך ש

$$\emptyset \neq V \subseteq U \quad V \cap A_1 = \emptyset$$

A_2 דלילה ב X . לכן קיימת ק"פ W כך ש

$$\emptyset \neq W \subseteq V \quad W \cap A_2 = \emptyset$$

$$\text{אז } \emptyset \neq W \subseteq U \quad W \cap (A_1 \cup A_2) = \emptyset$$

☺

הגדרה: מ"ט נקראת מקטגוריה ראשונה אם הוא איחוד בן מניה של קבוצות דלילות.

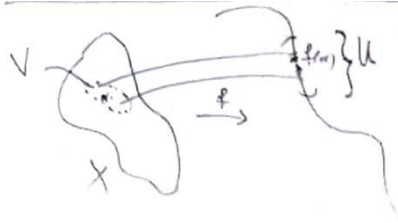
אחרת, הוא נקרא מקטגוריה שניה.

הערה: משפט Baire אומר שכל מרחב מטרי שלם הוא מקטגוריה שניה (ראו למשל "טופולוגיה קבוצתית" של האוניברסיטה הפתוחה, כרך א, עמוד 89).

רציפות פונקציות

תזכורת: (רציפות בנקודה): נניח שנתונה פונ' בין מ"ט $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$. נקראת רציפה

$$\boxed{\forall U \in \mathcal{N}(f(a)) \exists V \in \mathcal{N}(a): f(V) \subseteq U} \text{ אם } X \ni a$$



שקול: $\forall U \in \mathcal{N}(f(a)): f^{-1}(U) \in \mathcal{N}(a)$

(מילולית: מקור של סביבה ל $f(a)$ גם סביבה ל a).

משפט (קריטריון לרציפות): נניח $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ פונ' בין מ"ט. התנאים שקולים:

(1) f רציפה (בכל נקודה).

(2) מקור של כל קב' פתוחה גם פתוחה.

(3) מקור של כל קב' סגורה גם סגור.

$$(4) \forall A \subseteq X: z \in cl(A) \Rightarrow f(z) \in cl(f(A))$$

$$(5) f(cl(A)) \subseteq cl(f(A))$$

הוכחה:

$$(2) \Leftrightarrow (1)$$

נניח $0 \in \sigma$. צ"ל $f^{-1}(0) \in \tau$.

לכל $a \in f^{-1}(0)$ צ"ל $a \in int(f^{-1}(0))$

(קריטריון לפתיחות: A פתוחה $\Leftrightarrow int(A) = A$).

$$a \in f^{-1}(0)$$

\Downarrow

$$f(a) \in 0 \in \sigma$$

\Downarrow

$$0 \in N(f(a))$$

הגדרת הרציפות בנקודה a

↓

$$a \in f^{-1}(0) \in N(a)$$

הגדרת נקודות פנים

↓

$$a \in \text{int}(f^{-1}(0))$$

$$f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c \quad (2) \Leftrightarrow (3) \quad \text{כי}$$

$$(4) \Leftrightarrow (5) \quad \text{ברור.}$$

$$(3) \Leftarrow (5) \quad \text{נוכיח}$$

$$f(\text{cl}(A)) \subseteq \text{cl}(f(A)) \quad \text{צ"ל } A \subseteq X \text{ נניח}$$

$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\text{cl}(f(A)))$$

המעבר האחרון נובע מזה ש $f(A) \subseteq \text{cl}(f(A))$. נפעיל "cl" בשני האגפים:

$$\text{cl}(A) \subseteq \text{cl}\left(f^{-1}(\text{cl}(f(A)))\right) \stackrel{(*)}{=} f^{-1}(\text{cl}(f(A)))$$

(בהפעלת cl יש "מונטוניות" $(A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow \text{cl}(A_1) \subseteq \text{cl}(A_2))$)

הסבר (*):

(א) $\text{cl}(B)$ סגור.

(ב) נתון (3).

(ג) B סגור $\Leftrightarrow \text{cl}(B) = B$.

כעת, נפעיל f על שני האגפים לקבל:

$$f(\text{cl}(A)) \subseteq f f^{-1}(\text{cl}(f(A))) \subseteq \text{cl}(f(A))$$

נוכיח (1) \Leftarrow (4):

נניח בשלילה ש - (1) לא נכון. ז"א, f לא רציפה בנקודה מסוימת $a \in X$.

ז"א, קיימת סביבה פתוחה U של $f(a)$ כך ש - $f^{-1}(U) \notin N(a)$.

שקול: $a \notin \text{int}(f^{-1}(U))$

$$a \in \left(\text{int}(f^{-1}(U))\right)^c \stackrel{\text{תכונת הקשר}}{=} \text{cl}(f^{-1}(U)^c) \quad \text{שקול:}$$

בגלל נתון (4) נקבל:

$$f(a) \in cl(f(f^{-1}(U)^c)) = cl(f(f^{-1}(U^c))) \subseteq cl(U^c) = U^c$$

(המעבר האחרון נובע כי U פתוחה ולכן $Y \setminus U$ סגורה, וסגור של סגורה שווה לעצמה).

קיבלנו: $f(a) \notin U$ בסתירה לנתון!



משפט: (Heine- $\frac{1}{2}$) כל רציפה שומרת על התכנסות סדרות.

הוכחה:

$$x_n \xrightarrow{\tau} a \underset{\text{צריך להוכיח}}{\Rightarrow} f(x_n) \xrightarrow{\sigma} f(a)$$

שקול להוכיח – $\forall U \in N(f(a)) \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: f(x_n) \in U$

עבור $U \in N(f(a))$ המקור $f^{-1}(U) \in N(a)$ (בגלל רציפות f בנקודה a).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{נתון}$$

וגם ידוע $f^{-1}(U) \in N(a)$ ולכן קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש- $x_n \in f^{-1}(U)$

מכאן $\forall n \geq n_0: f(x_n) \in U$



הערה חשובה: במ"מ ההיפך גם נכון (עיקרון *Heine*). אבל זה לא תמיד נכון במ"ט! (אפילו אם מתקיימת תכונת האוסדורף).

ראו דוגמה ב מתחילת ההרצאה

$id: (X, \tau) \rightarrow (X, \tau_{discr})$ שומרת על התכנסות סדרות אבל לא רציפה.

תכונות נוספות של פונקציות רציפות:

- כל $(X, \tau_{discr}) \xrightarrow{f} (Y, \sigma)$ תמיד רציפה.
- כל $(X, \tau) \xrightarrow{f} (Y, \tau_{tr})$ תמיד רציפה.
- הרכבה של פונקציות רציפות $f_2 \circ f_1: X_1 \rightarrow X_3$ של $f_1: X_1 \rightarrow X_2$ ו- $f_2: X_2 \rightarrow X_3$ היא גם רציפה.

• הוכיחו שבכל במ"ט (X, τ) ולכל $f_1, f_2 \in C(X)$ מתקיים:

$$f_1 + f_2 \in C(X) \quad (\text{א})$$

$$f_1 \cdot f_2 \in C(X) \text{ (ב)}$$

$$\frac{f_1}{f_2} \in C(X) \text{ (ג) בתנאי ש- } f_2(x) \neq 0 \text{ לכל } x \in X.$$

הערה: נוח לבדוק "דרך סביבות".

משפט (תורשתיות של רציפות): $f: X \rightarrow Y$ רציפה, $\emptyset \neq A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ כך ש

$$f(A) \subseteq B \text{ אזי פונקציה מושרית } \begin{array}{c} f_0 \\ A \rightarrow B \\ a \mapsto f(a) \end{array} \text{ גם רציפה.}$$

הוכחה:

בודקים לפי קריטריון רציפות מספר 2 (ז"א מקור של קבוצה פתוחה הוא גם פתוח).

צ"ל שלכל קבוצה פתוחה $O \cap B$ (כאשר $O \in \tau_Y$) ב- B מתקיים $f_0^{-1}(O \cap B)$ פתוחה ב- A .

$$\begin{aligned} f_0^{-1}(O \cap B) &= \{x \in A \mid f(x) \in O \cap B\} = f^{-1}(O \cap B) \cap A \\ &= f^{-1}(O) \cap f^{-1}(B) \cap A \stackrel{\substack{\cong \\ f(A) \subseteq B}}{\cong} \underbrace{f^{-1}(O)}_{\substack{\text{פתוחה ב-} X \\ \text{בגלל רציפות } f}} \cap A \end{aligned}$$

לכן $f^{-1}(O) \cap A$ קבוצה פתוחה ב- A (תת מרחב).



הרצאה 6

שאלה כללית: אילו תכונות נשמרות על ידי "תמונה רציפה"?
בהמשך נוכיח זאת עבור מספר תכונות. למשל: ספרביליות, קשירות,
קשירות מסילתית, קומפקטיות, קומפקטיות סדרתית ...
(פונקציה רציפה על $f: X \rightarrow Y = f(X)$)

משפט: צפיפות וספרביליות נשמרות על ידי תמונה רציפה.

הוכחה: נניח $f: X \rightarrow Y$ רציפה על, ז"א $f(X) = Y$.

$$\text{צ"ל } \overline{f(A)} = Y \Leftarrow \bar{A} = X$$

$$\text{שקול להוכיח } \overline{f(A)} = f(X)$$

לפי קריטריון (5) של רציפות מתקיים: $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

$$\text{נציב } \bar{A} = X \text{ ונקבל } f(X) \subseteq \overline{f(A)}$$

$$\text{מצד שני, } \overline{f(A)} \subseteq Y = f(X)$$

$$\text{לכן קיבלנו: } \overline{f(A)} = f(X) = Y$$

והוכחנו שנשמרת צפיפות.

עכשיו אם ניקח $X \in Sep$ אז קיים $A \subseteq X$ כך ש- $|A| \leq \aleph_0$, $\bar{A} = X$.

$$\text{אז } \overline{f(A)} = f(X) = Y$$

מכאן גם $Y \in Sep$! גם בת מנייה! מכאן גם $|f(A)| \leq \aleph_0$

☺

איזומורפיזמים במרחבים טופולוגיים

תזכורת: איזומורפיזם ב $Metr$ = איזומטריות.

איזומורפיזם ב TOP = $homeomorphism$.

הגדרה: נניח $(X_1, \tau_1) \xrightarrow{f} (X_2, \tau_2)$ פונקציה בין מ"ט. f נקרא **הומיאומורפיזם**

($Homeomorphism$ אזהרה: זה לא $Homomorphism$)

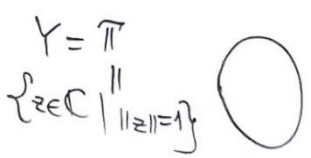
אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

- (א) f חח"ע + על (ז"א קיימת פונקציה f^{-1}).
- (ב) f רציפה.
- (ג) f^{-1} רציפה.

הערה: $(\text{א}) \neq (\text{ב}) \neq (\text{ג})$ אפילו במקרים טבעיים.

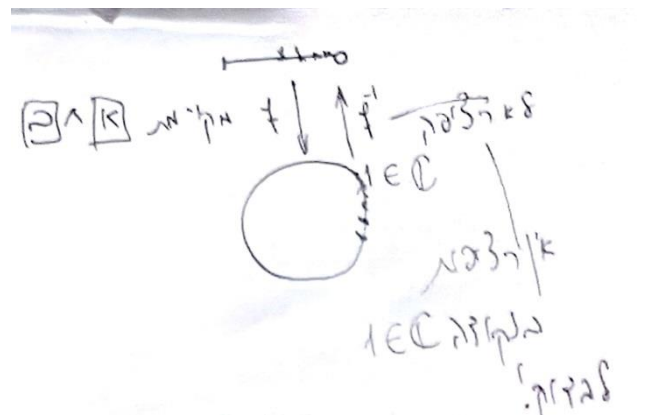
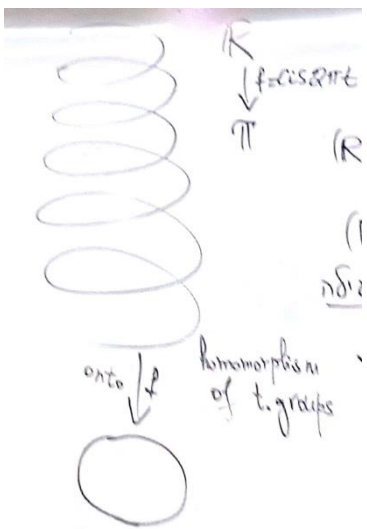
דוגמה 1: $f^{-1}: (\mathbb{R}, \tau_{discr}) \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה אבל לא $f = id: \mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_{discr})$
 $f^{-1}(0) = \{0\} \notin \tau$ אבל $\{0\} \in \tau_{discr}$

דוגמה 2: (גיאומטרית) $f: [0,1) \rightarrow T$



$q: \mathbb{R} \rightarrow T := \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\|=1\}, \quad q(t) = cis(2\pi t) = \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t)$

זאת פונקציה רציפה (וגם הומומורפיזם חבורות).
 כעת נגדיר צמצום של פונקציה הנ"ל $f: [0,1) \rightarrow T$



אז $f: [0,1) \rightarrow T$ רציפה חח"ע ועל

אבל $f^{-1}: T \rightarrow [0,1)$ לא רציפה בנקודה $z = 1 \in T$

(למצוא תת קבוצה פתוחה (סגורה) ב $[0,1)$ כך שהמקור לא פתוחה (לא סגורה) ב T)

הגדרה: נסמן $(X_1, \tau_1) \simeq (X_2, \tau_2)$ אם קיים $f: X_1 \rightarrow X_2$ homeomorphism ונגיד

מרחבים הומיאומורפיים.

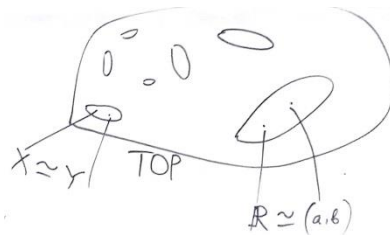
תכונות שמחלקות את TOP למחלקות :

$$(1) (X, \tau) \simeq (X, \tau)$$

$$(2) (X_2, \tau_2) \simeq (X_1, \tau_1) \Leftrightarrow (X_1, \tau_1) \simeq (X_2, \tau_2)$$

$$(3) (X_1, \tau_1) \simeq (X_3, \tau_3) \Leftrightarrow \begin{cases} (X_1, \tau_1) \simeq (X_2, \tau_2) \\ (X_2, \tau_2) \simeq (X_3, \tau_3) \end{cases}$$

(בשביל להוכיח את (1) משתמשים ב- id , בשביל (2) ב- f^{-1} ובשביל (3) ב- $f_1 \circ f_2$).



שאלה חשובה: מתי 2 מרחבים טופולוגיים X, Y הם הומיאומורפיים

או ומתי לא ? $X \simeq Y$ או $X \neq Y$

שאלה יותר כללית: מתי קיימת פונקציה רציפה ועל $X \xrightarrow{f} Y$ (ז"א מתי Y = "תמונה רציפה" של X).

הערה: מה התכונות שנשמרות ע"י הומיאומורפיזמים או ע"י תמונה רציפה ?

(א) כל תכונה טופולוגית נשמרת ע"י הומיאומורפיזם.

(ב) כל תכונה מטרתית נשמרת ע"י איזומטריה.

דוגמאות להומיאומורפיזמים:

- הרכבה של פונקציות רציפות (הומיאומו') גם רציפה (הומיאומו').
- אם $f : X \rightarrow Y$ רציפה (הומיאומו') אז גם $f : A \rightarrow f(A)$ רציפה (הומיאומו').
- כל איזומטריה בעצם הומיאומורפיזם (ההיפך לא תמיד נכון!).
- בכל מרחב נורמי $(E, \|\cdot\|)$: כפל בסקלר $c \neq 0$ תמיד הומיאומורפיזם:

$$\boxed{M_c^{-1} = M_{c^{-1}}}$$

- **משפט:** כל מרחב נורמי \simeq לכל כדור פתוח שלו. הומיאומורפי

הוכחה:

שלב א' $\forall r > 0, \forall a \in E: B_r(a) \simeq B_1(0)$

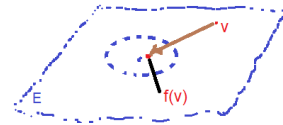
כי: $B_1(0) \underset{M_r}{\simeq} B_r(0) \underset{T_a}{\simeq} B_r(a)$

הערה: הרכבה של הומיאומורפיזם גם עם צמצום מלא (גם בטווח) הוא הומיאומורפיזם.

$$E \underset{f}{\simeq} B_1(0) \quad \text{מ"ל ש: שלב ב'}$$

$$f : E \rightarrow B(0_E, 1) \quad \boxed{f(v) = \frac{1}{1+\|v\|} \cdot v} \quad \text{נגדיר}$$

$$f(v) \in B(0_E, 1) \Leftrightarrow f(v) = \left\| \frac{1}{1+\|v\|} v \right\| = \frac{\|v\|}{1+\|v\|} < 1$$



$$f^{-1} : B(0_E, 1) \rightarrow E \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\|x\|} \cdot x$$

☺

תוצאות:

$$\mathbb{R} \simeq (-1, 1) \simeq (a, b) \quad \forall a < b$$

$$\mathbb{R}^n \simeq B(v, r) \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathbb{R}^2 \simeq \text{עיגול פתוח} \simeq (-a, a) \times (-a, a)$$

(רמז: $\| \cdot \|$ שקול טופולוגית ל $\| \cdot \|_{\max}$ ב \mathbb{R}^2)

הערה: הומיאומורפיזם לא תמיד שומר על **תכונות מטריות** (חסימות, שלמות, ...)

המשך דוגמאות:

- כאשר $a < b, c < d$ $[a, b] \simeq [c, d]$
- $(a, \infty) \simeq (c, d) \simeq (-\infty, b)$

$$\begin{array}{c} 2^x \\ \updownarrow \\ \mathbb{R} \\ \updownarrow \\ \log_2 \end{array} (0, \infty)$$

תרגיל: למיין קטעים ב \mathbb{R} :

(א) עד כדי הומיאומורפיזמים (כן יחס שקילות!).

(ב) עד כדי תמונה רציפה (לא יחס שקילות!).

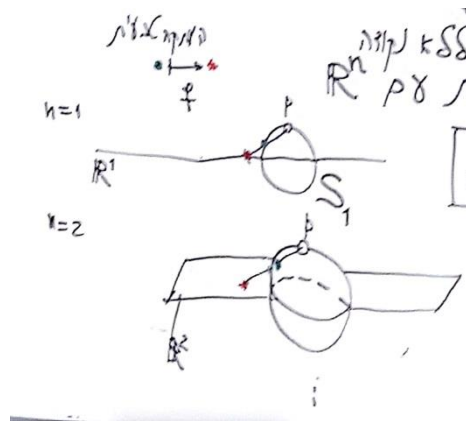
• היטל סטריאוגרפי

טענה: ספירה n מימדית S_n ללא נקודה אחת היא הומיאומורפית עם \mathbb{R}^n .

$$S_n / \{z\} \simeq \mathbb{R}^n$$

ניזכר כי: $S_n = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$

למשל: כאשר $n = 1, 2$ נגדיר f לפי:



קשירות

הערה: לכל מ"ט (X, τ) תת קבוצות X, \emptyset תמיד סגורות (כי $\emptyset = X^c, X = \emptyset^c$).

השאלה: מתי יש סגורות נוספות לא טריוויליות?

הגדרות: בניח (X, τ) מ"ט.

א) $X = X_1 \cup X_2$ נקרא **פירוק טופולוגי** אם:

$$\begin{cases} X_1 \cap X_2 = \emptyset \\ X_1, X_2 \text{ פתוחות} \\ \text{לא ריקות} \end{cases}$$

לתנאי השני שקול – סגורות, וגם שקול – **סגורות**.

ב) אומרים (X, τ) **קשיר** (Connected) ונסמן: $(X, \tau) \in Conn$ אם **לא** קיים פירוק טופולוגי

הערה חשובה: (X, τ) לא קשיר אם ורק אם קיימת תת קבוצה סגורה לא ריקה ששונה מ X .

• אם: $\mathbb{R} \supset \underbrace{X}_{\text{כתת מרחב}} = [2,4) \cup (5, \infty)$

אז X לא קשיר. שימו לב ש $(5, \infty)$ ו $[2,4)$ סגורות ב X (לא ב \mathbb{R}).

• מרחב מטרי של רציונליים \mathbb{Q} (כתת מרחב בממשיים) לא קשיר.

יש אינסוף ת"ק סגורות ובהתאם יש אינסוף "פירוקים טופולוגיים". למשל:

$$X_1 = (-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$$

$$X_2 = \mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, \infty)$$

• הוכיחו שמרחב (\mathbb{Z}, d_p) (עם מטריקה p -אדית) הוא לא קשיר.

הגדרה: נניח $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2) \in TOP$ כך ש- $X_1 \cap X_2 = \emptyset, X_1 \neq \emptyset, X_2 \neq \emptyset$.

מגדירים **סכום טופולוגי** $X = X_1 \cup X_2$ כקבוצה $X = X_1 \cup X_2$ עם טופולוגיה הבאה

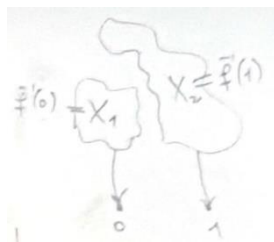
$$\tau := \{O_1 \cup O_2 \mid O_1 \in \tau_1, O_2 \in \tau_2\}$$

תרגיל: הוכיחו שמרחב לא קשיר אם"ם הוא הומיאומורפי לסכום טופולוגי.

משפט: התנאים הבאים שקולים:

$(X, \tau) \notin Conn$ (ז"א לא קשיר).

(2) קיימת פונקציה רציפה $f: X \rightarrow [0,1]$ כך ש $f(X) = \{0,1\}$



הוכחה: $1 \Rightarrow 2$ לפי משפט רציפות ש"ל מקור של קבוצה פתוחה גם פתוח (יש 4 מקרים...)

$$f^{-1}(O) = \begin{cases} X & \{0,1\} \subset O \\ \emptyset & \{0,1\} \cap O = \emptyset \\ X_1 & \{0,1\} \cap O = \{0\} \\ X_2 & \{0,1\} \cap O = \{1\} \end{cases}$$

$$1 \Rightarrow 2 \quad X = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1) \quad \text{פירוק טופולוגי (מדוע?)}$$



שימו לב: אין תכונת ערך ביניים! בהמשך זה נותן מחצית ל- "משפט ערך ביניים".

תרגיל: הוכיחו (הכללת המשפט הקודם) נקודות אי-רציפות של פונקציה האופיינית χ_A של

$A \subseteq X$ היא $\partial(A)$. כאשר:

$$\chi_A : X \rightarrow \{0,1\}, \chi_A(a) = 1 \quad \forall a \in A, \quad \chi_A(x) = 0 \quad \forall x \notin A$$

הערה: $A \subseteq X$ סגורה אם ורק אם $\partial(A) = \emptyset$.

משפט: קשירות נשמרת ע"י תמונה רציפה.

הוכחה:

נניח ש $X \in Conn$. מאחר ו- f על אז $f(X) = Y$. צ"ל $Y \in Conn$.

אם נניח שלא, אז פריק טופולוגית: $Y = \underbrace{Y_1}_{\neq \emptyset} \sqcup \underbrace{Y_2}_{\neq \emptyset}$ כאשר Y_1, Y_2 פתוחות.

$$X = f^{-1}(Y_1) \sqcup f^{-1}(Y_2) \quad \text{אזי}$$

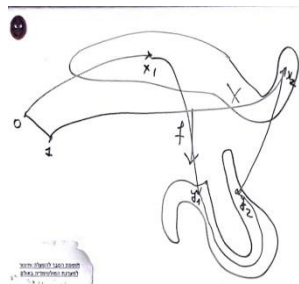
כאשר $f^{-1}(Y_1), f^{-1}(Y_2) \neq \emptyset$ (כי f היא פונקציה על) וגם הן פתוחות כי f רציפה. קיבלנו ש $X \notin Conn$ ז"א פריק, בסתירה!

הגדרה: מ"ט X קשיר מסילתית אם לכל $x, y \in X$ קיימת מסילה מ x ל y . מסילה מ x_1 ל

$$x_2 \in X \quad [0,1] \xrightarrow{\varphi} X \quad \text{פונקציה רציפה, } \varphi(0) = x_1, \varphi(1) = x_2. \quad \text{סימון: } X \in PConn$$

משפט: קשירות מסילתית נשמרת ע"י תמונה רציפה.

הוכחה: נניח ש $X \in PConn$. על ורציפה אז $f(X) = Y$. צ"ל $Y \in PConn$.



נניח $y_1, y_2 \in Y$, אז קיימים $x_1 \xrightarrow{f} y_1, x_2 \xrightarrow{f} y_2$ כי f על.

קיימת מסילה מ x_1 ל x_2 $[0,1] \xrightarrow{\varphi} X$ פונקציה רציפה, $\varphi(0) = x_1, \varphi(1) = x_2$.

$$[0,1] \xrightarrow{\varphi} X \xrightarrow{f} Y \quad [0,1] \xrightarrow{f \circ \varphi} Y \quad \text{נגדיר מסילה -}$$

ואז מצאנו מסילה בין y_1 ל- y_2 .

☺

אזהרה: תמונה $f[0,1]$ של המסילה לא תמיד הומואומורפי ל $[0,1]$.

למשל ידוע שקיימת פונקציה רציפה ועל $f : [0,1] \rightarrow [0,1]^2$ (Peano curve).

משפט: $PConn \subset Conn$.

הוכחה: נניח $X \in PConn$. צ"ל $X \in Conn$.

אם נניח בשלילה שלא, אז X פריק: $X = X_1 \sqcup X_2$

נבחר $x_2 \in X_2, x_1 \in X_1$

$X \in PConn \Leftrightarrow$ קיימת מסילה מ x_1 ל x_2 , לכן

$$\varphi : [0,1] \rightarrow X \quad \varphi(0) = x_1, \varphi(1) = x_2$$

$$[0,1] = \varphi^{-1}(X_1) \sqcup \varphi^{-1}(X_2) \quad \text{כעת}$$

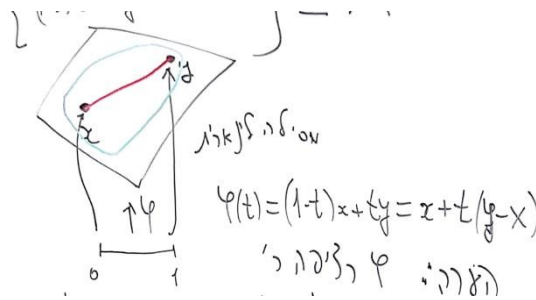
$\varphi^{-1}(X_1), \varphi^{-1}(X_2)$ קבוצות זרות פתוחות (רציפות!)

לא ריקות $(0 \in \varphi^{-1}(X_1), 1 \in \varphi^{-1}(X_2))$

ואז קיבלנו פירוק של $[0,1]$ בסתירה לכך ש- $[0,1] \in Conn$.

☺

הגדרה: תת קבוצה X במ"נ $(E, \|\cdot\|)$ נקראת **קבוצה קמורה** (convex) אם לכל $x, y \in X$ מתקיים $\{(1-t)x + ty : 0 \leq t \leq 1\} \subseteq X$ (מסילה לינארית) נסמן $X \in Conv$.



הערה:

$\varphi \in Lip_{\|y-x\|}$ כי

דוגמה: כל מ"נ $(E, \|\cdot\|)$ וכדורים בתוכו (פתוחים, סגורים) קבוצות קמורות ב E .

טענה: $Conv \subsetneq PConn \subsetneq Conn$

הגדרה: $\mathbb{R} \supseteq X \neq \emptyset$ קטע אם לכל $a, b \in X$ מתקיים $[a, b] \subseteq X$.

טענה: נניח $X \subset \mathbb{R}$ תת מרחב. אזי התנאים הבאים שקולים:

$$(1) \quad X \text{ "קטע" (יתכן כמובן לא חסום)}$$

$$(2) \quad X \in \text{Conv}$$

$$(3) \quad X \in \text{PConn}$$

$$(4) \quad X \in \text{Conn}$$

הסבר: (1) \Leftrightarrow (2): לכל $a, b \in X$ מתקיים $[a, b] \subseteq X$. מצד שני $[a, b] = \{a + (b - a)t \mid 0 \leq t \leq 1\}$.

(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) נובע מהכלות ברורות $\text{Conv} \subseteq \text{PConn} \subseteq \text{Conn}$.

(4) \Rightarrow (1) אם נניח שלא, אז X לא קטע, כלומר קיימים $a, b \in X$ כך ש $[a, b] \not\subseteq X$.

ז"א קיימים: $a < c < b$ כך ש $a, b \in X$ אבל $c \notin X$.

$$\text{נגדיר } X_1 := (-\infty, c) \cap X, X_2 := (c, \infty) \cap X$$

ואז נקבל ש $X = \underbrace{X_1}_{a \in} \cup \underbrace{X_2}_{b \in}$ פירוק טופולוגי.

ואז קיבלנו ש $X \notin \text{Conn}$ - בסתירה!



משפט (ערך הביניים): נניח X מ"ט. אזי התנאים הבאים שקולים:

$$(1) \quad X \in \text{Conn}$$

(2) לכל פונקציה רציפה $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ממשית יש תכונת ערך ביניים.

הוכחה: (1) \Leftrightarrow (2): תמונה רציפה שומרת על Conn . לכן $f(X) \subset \mathbb{R} \in \text{Conn}$ ואז מהטענה הקודמת נקבל ש $f(X) \ni \{\text{קטעים}\}$, ואז $f(X)$ בעל תכונת ערך הביניים.

(2) \Leftrightarrow (1): נניח בשלילה שלא. אז $X \notin \text{Conn}$. ז"א קיים פירוק טופולוגי $X = X_1 \cup X_2$

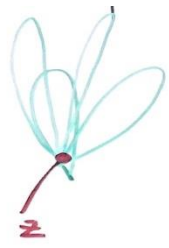
נגדיר פונקציה $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, אשר שולחת את X_1 ל-0 ואת X_2 שולחת ל-1.

X_1, X_2 פתוחות ב- $X \Leftarrow$ קל לבדוק (4 מקרים) שאכן מקור של קבוצה פתוחה גם קבוצה פתוחה, ואז f רציפה. אבל נקבל ש $f(X) = \{0, 1\}$.

וזאת לא מקיימת את תכונת ערך הביניים, בסתירה!



משפט (האלומות – תנאי מספיק לקשירות): נניח X מ"ט, $X = \bigcup_{j \in J} Y_j$ כך ש:



$$\forall j \in J: Y_j \in Conn \quad (1)$$

$$\bigcap_{j \in J} Y_j \neq \emptyset \quad (2)$$

אזי $X \in Conn$

הוכחה: מתכונה (2) קיימת נקודה משותפת $z \in \bigcap_{j \in J} Y_j$

נניח בשלילה ש X פריק, אזי קיימות קבוצות זרות ופתוחות ולא ריקות X_1, X_2 כך ש –

$$X = X_1 \sqcup X_2$$

בה"כ $z \in X_1$ (ואז $z \notin X_2$).

$$\forall j \in J: Y_j = (Y_j \cap X_1) \sqcup (Y_j \cap X_2)$$

כעת נשים לב ש $Y_j \cap X_1$ ו $Y_j \cap X_2$ פתוחות זרות בתת מרחב Y_j ו $z \in Y_j \cap X_1$

אז $Y_j \cap X_2 = \emptyset$ לכל j , אחרת היינו מקבלים ש $Y_j \notin Conn$ (פריק).

$$X_2 = \bigcup_{j \in J} (X_2 \cap Y_j) = \emptyset$$

כעת בסתירה לפירוק של X .



תוצאות:

(1) נניח $X = Y_1 \cup Y_2$, כאשר $Y_1, Y_2 \in Conn$, $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$. אזי $X \in Conn$

(2) שרשור

נניח $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Y_k$, כאשר $Y_k \in Conn$ לכל $k \in \mathbb{N}$ וכן –

$$\forall k \in \mathbb{N}: Y_k \cap Y_{k+1} \neq \emptyset$$

אזי $X \in Conn$

הסבר: (1) מייד מהמשפט!

(2) נובע מ (1) ואינדוקציה נובע מקרה של מס' סופי של הגורמים.

$$\forall k \in \mathbb{N}: A_k := Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_k \in Conn$$

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$$

$$A_1 \subseteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \neq \emptyset$$

לכן לפי משפט האלומות נקבל ש $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in Conn$



הגדרה: (מרכיבי קשירות): במ"ט X נגדיר את היחס הבא

$x \equiv y \stackrel{def}{=} x \equiv y$ אם "אפשר לחבר x ל y ע"י קבוצה קשירה". זאת אומרת, קיימת

$$Conn \ni A_{x,y} \subset X$$

$$\{x, y\} \subset A \quad \text{כך ש}$$



טענה: היחס הנ"ל הוא יחס שקילות.

הסבר:

$$A_{x,x} = \{x\} \quad \text{הסבר:} \quad x \equiv x \quad (1)$$

$$A_{y,x} := A_{x,y} \quad \text{הסבר:} \quad ,x \equiv y \Rightarrow y \equiv x \quad (2)$$

$$A_{x,z} := A_{x,y} \cup A_{y,z} \quad \text{הסבר:} \quad x \equiv z \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv y \\ y \equiv z \end{cases} \quad \text{צ"ל} \quad (3)$$

ואכן $y \in A_{x,y}$ וגם $y \in A_{y,z}$ ואז מתוצאה 1 (שירשור) נקבל ש $A_{x,z} \in Conn$.

הרצאה 7

הגדרה: מרכיב קשירות של נק x ב X הוא $[x] := \{y \in X | x \equiv y\}$ "מחלקה של x ".

כאשר $x \equiv y \Leftrightarrow \exists A_{x,y} \in Conn, \{x, y\} \subseteq A_{x,y} \subseteq X$

תכונות מרכיבי קשירות:

- $X = \bigcup_{x \in X} [x]$ (יש חזרות! $[x] = [y] \Leftrightarrow x \equiv y$).
- מס' (עוצמה) של מרכיבי קשירות נשמר ע"י הומיאומורפיזמים.
- X קשיר \Leftrightarrow יש מרכיב קשירות 1 בלבד.

רמז: משפט האלומות.

- $[x] \in Conn$
- $[x] = \bigcup \{A \subseteq X | x \in A, A \in Conn\}$
- ז"א $[x] =$ תת קבוצה קשירה הגדולה ביותר המכילה את x .
- $[x]$ סגור ב X .

רמז: תוכיחו קודם את הטענה הבאה (ואז תשתמשו בתכונה הקודמת):

טענה: (תרגול) נניח $\bar{Y} = X$ (ז"א Y צפופה ב X). אם $Y \in Conn$ אז גם $X \in Conn$.

דוגמה: תארו מרכיבי קשירות של:

א. $X = (0,2) \cup (2,5) \cup \{7\}$

תשובה: $[1] = (0,2), [3] = (2,5), [7] = \{7\}$

ב. $X = \{1,2,3,4\} \times \mathbb{R}$

תשובה: $\{1\} \times \mathbb{R}, \{2\} \times \mathbb{R}, \{3\} \times \mathbb{R}, \{4\} \times \mathbb{R}$.

הגדרה: מ"ט X נקרא "לא קשיר לחלוטין" (*totally disconnected*) אם

$[x] = \{x\}$ לכל $x \in X$ (רק נקודות תת קבוצה קשירה).

דוגמאות:

(1) מרחבים דיסקרטיים.

(2) \mathbb{Q}

(3) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$(\mathbb{Z}, d_p) \quad * \quad (4)$$

(רמז: לכל $a \in (\mathbb{Z}, d_p)$ ו $b \neq a$ קיימת סביבה סגורה $U \in N(a)$ כך ש $b \notin U$)

הגדרה: (מרכיב קשירות מסילתי): לכל מ"ט X ונקודה $x \in X$ מרכיב קשירות $[x]_p$

של x מוגדר כמחלקת שקילות של x לגבי יחס שקילות הבא:

$$y \equiv_p x \stackrel{def}{=} \text{קיימת ב } X \text{ מסילה מ } x \text{ ל } y$$

טענה: \equiv_p יחס שקילות.

הסבר:

$$(1) \quad x \equiv_p x \quad \text{ניקח מסילה קבועה.}$$

$$(2) \quad y \equiv_p x \Leftarrow x \equiv_p y \quad \text{עבור מסילה } f: [0,1] \rightarrow X$$

$$\text{נגדיר "מסילה הפוכה" } f^*: [0,1] \rightarrow X \quad f^*(t) = f(1-t)$$

$$(3) \quad x \equiv_p z \Leftarrow \begin{cases} x \equiv_p y \\ y \equiv_p z \end{cases}$$

$$f_3(t) = \begin{cases} f_1(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f_2(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad \text{עבור } \begin{cases} f_1(0) = x, f_1(1) = y \\ f_2(0) = y, f_2(1) = z \end{cases} \quad \text{נגדיר } f_3: [0,1] \rightarrow X \text{ כך ש}$$

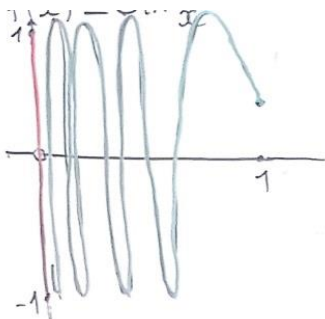
$$f_3(0) = x, f_3(1) = z$$

ונקבל ש f_3 רציפה מהתרגיל הבא (שהיה בתרגול):

תרגיל: נניח $X = Y_1 \cup Y_2$ סגורות.

נתונה פונקציה $f: X \rightarrow Z$ כך ש הצמצומים $f|_{Y_1}: Y_1 \rightarrow Z, f|_{Y_2}: Y_2 \rightarrow Z$ רציפות.

אז f רציפה (* תנו דוגמה נגדית אם אין סגירות!).



הערה: $PConn \neq Conn$

$$\text{נגדיר פונקציה } f: (0,1] \rightarrow [-1,1] \quad f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

נגדיר "Sine curve" $X := (\{0\} \times [-1,1]) \cup Gr(f)$

$$(0,1] \approx Gr(f) := \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1 \right\}$$

כעת, $(0,1] \approx Gr(f)$ קשיר ו $Gr(f)$ צפוף ב X (כלומר $\overline{Gr(f)} = X$), לכן (לפי התרגיל הנ"ל) $X \in Conn$. ז"א יש מרכיב קשירות 1.

אבל אין מסילה מנקודה "אדומה" (על הקטע) לנקודה "ירוקה" (ראו ספר האוניברסיטה הפתוחה, טופולוגיה קבוצתית).

יש 2 מרכיבי קשירות מסילתיים ולכן X לא קשיר מסילתית, כלומר $X \notin PConn$.

תרגיל: (לעמיד) לכל פונקציה רציפה $f: X \rightarrow Y$ מתקיים ש

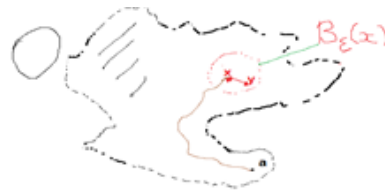
$$X \simeq \underbrace{Gr(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}}_{\text{תת מרחב טופולוגי}} \subset X \times Y$$

בהמשך נלמד מכפלה טופולוגית (באופן כללי).

משפט: כל קבוצה קשירה ופתוחה O במרחב נורמי E היא קשירה מסילתית.

הוכחה: נבחר $a \in O$ ונסמן $A := [a]_p$ מרכיב קשירות מסילתית של a במרחב O . אז A פתוחה ב O . כי אם $x \in A$ אז $B_\varepsilon(x) \subseteq O$ עבור ε מספיק קטן. $B_\varepsilon(x)$ קמור לכן קיימת מסילה לינארית ב $B_\varepsilon(x)$ מ x לכל $y \in B_\varepsilon(x)$. אז גם קיימת מסילה (לא בהכרח לינארית) במרחב O מנקודה a ל y (טרנזיטיביות). לכן $B_\varepsilon(x) \subseteq A$.

באופן דומה אפשר להוכיח שגם המשלים $O \setminus A$ פתוח ב O . אבל אז $O \setminus A$ קבוצה ריקה כי אחרת נקבל ש O פריק. לכן $O = A = [a]_p$ ואז O קשיר מסילתית (מרכיב 1).



הגדרה: X נקרא קשיר מקומית בנקודה $a \in X$ אם לכל סביבה $U \in N(a)$ קיימת סביבה $U \supseteq V \in N(a)$ כך ש V קשיר. אומרים: קשיר מקומית אם זה מתקיים בכל נקודה.

תרגיל:

א. הוכיחו שכל תת קבוצה פתוחה במרחב נורמי היא קשירה מקומית (ולא תמיד קשירה).

ב. * תנו דוגמה של תת מרחב ב \mathbb{R}^2 שהוא קשיר אבל לא קשיר מקומית.

הומיאומורפיזמים המשך:

- $[3,8] \neq [0,1] \cup [3,6]$

כי הראשון קשיר והשני לא קשיר.

הגדרה: נקודה $a \in X$ במ"ט X נקראת **מחלקת** אם: X קשיר אבל $X \setminus \{a\}$ לא קשיר.

למשל: בעקומה הבאה נקודות אדומות הן נקודות מחלקות



הערה: קיום של נקודה לא מחלקת זאת **תכונה טופולוגית** (נשמרת ע"י הומיאומורפיזם).

טענה: אם $X \xrightarrow{f} Y$ הומיאומורפיזם אז לכל נק' מחלקת $p \in X$ גם $f(p) \in Y$ נק' מחלקת.

$$\text{גם הומיאומורפיזם.} \quad \underbrace{X/\{p\}}_{\text{פריק ז"א לא קשיר}} \xrightarrow{f_*} \underbrace{Y/\{f(p)\}}_{\text{שגם פריק}}$$

הסבר: שימוש (פעמיים) בתורשתיות של הרציפות.

- $(0,1) \neq [2,3]$ $[0,1) \neq (2,5)$

ב- $(2,5)$ כל נקודה היא "נקודה מחלקת" $((2,5)/\{c\} \notin Conn)$. אבל ב- $[0,1)$ יש נק' שלא מחלקת, זאת נק' 0 . $[0,1)/\{0\} \in Conn$

תכונה חשובה: הומיאומורפיזם שומר על נקודות מחלקות.

כנ"ל: מספר נקודות מחלקות, מספר נקודות לא מחלקות. כנ"ל מספר מרכיבי קשירות.

- הוכיחו ש- $8 \neq 0$ (שניהם קומפקטיים, קשירים...)
- למיין עד כדי הומיאומורפיזמים:

(א) את כל "הספרות"

◀1234567890▶

(ב) האלף-בית האנגלי

ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

(עבור sans serif font "ללא קישוטים, ללא עובי" אותיות וגם הספרות)

תרגיל: הוכיחו שכל הכדורים ב (\mathbb{Z}, d_p) הם הומיאומורפיים.

הערה: כל פונקציה לינארית בין מרחבים אוקלידיים

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A_f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$$

היא רציפה (ליפשיץ $k = \sqrt{\sum_i \sum_j a_{ij}^2}$), כאשר A_f מטריצה של f

↓

$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ לינארית הפיכה ($\det(A_f) \neq 0$). אזי f הומיאומורפיזם.

הגדרה: (אוטומורפיזמים)

• **חבורת הומיאומורפיזמים של מ"ט**

$$Homeo(X) := \{X \xrightarrow{f} X \mid f \text{ הומיאומורפיזם}\}, X \in TOP$$

• **חבורת איזומטריות של מ"מ**

$$Iso(X) := \{(X, d) \rightarrow (X, d) \mid \text{איזומטריות}\}, X = (X, d) \in Metr$$

שימו לב: אם $\tau = top(d)$ אז $Iso(X, d)$ תת חבורה של $Homeo(X, \tau)$.

$$Iso(X) \leq Homeo(X) \leq \underbrace{(S_X, \circ)}_{\text{חבורה סימטרית ת"ח}}$$

הגדרה: נגדיר פעולה טבעית $Homeo(X) \times X \rightarrow X \quad (f, x) \mapsto f(x)$

מחלקות שקילות $[x] = \{f(x) \in X \mid f \in Homeo(X)\}$ אורביטה (מסלול) של x .

הגדרה: אומרים ש X הוא **מ"ט הומוגני** (*homogeneous*) אם יש רק מסלול 1.

שקול: $\forall x, y \in X, \exists f \in Homeo(X): f(x) = y$

זאת תכונה טופולוגית. זאת אומרת נשמרת ע"י הומיאומורפיזמים.

דוגמה: כל מ"ט דיסקרטי הוא הומוגני. כאן $Homeo(X, \tau_{discr}) = S_X$?

דוגמה: $X = (0, 2)$ מ"ט הומוגני.

אחד מההסברים: $\mathbb{R} \simeq (0, 2) \cup \mathbb{R}$ הומוגני.

דוגמה: אם $X = [0, 1) \cup \{3\}$ אז לא הומוגני. יש 3 מסלולים הבאים:

$$[3] = \{3\}, \quad [0] = \{0\}, \quad \left[\frac{1}{2}\right] = (0, 1)$$

הגדרה: באופן דומה מגדירים מ"מ (X, d) הומוגני

(אם לפעולה $Iso(X) \times X \rightarrow X$ יש מסלול אחד).

דוגמה: \mathbb{R}^n , מרחב נורמי, S_n , (\mathbb{Z}, d_p) מ"מ הומוגניים (לכן גם הומוגני כמ"ט).

דוגמה: $X = (-1, 1)$ אז הוא הומוגני כמרחב טופולוגי אבל לא כמ"מ

(שימו לב: כאן $Iso(X)$ בעל שני איברים בלבד: פונקצית זהות ושיקוף).

תרגיל: כמה מסלולים קיימים בפעולה של $Homeo(x)$ על X אם:

(א) $X = (3, \infty)$

(ב) $X = [0, 1]$

(ג) $X = 8$

(ד) $X = (0, 1) \cup (2, 4) \cup \{7\}$.

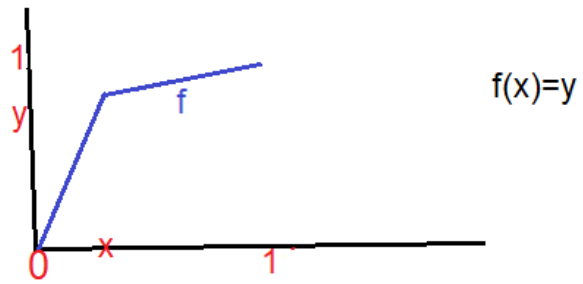
תשובה:

(א) מסלול 1 (הומוגניות!). $\mathbb{R} \simeq (3, \infty) \cup \mathbb{R}$ - ו- הומוגני (הזזות).

(ב) 2 מסלולים. $[0] = \{0, 1\} = [1]$ $\left[\frac{1}{2}\right] = \{x \mid 0 < x < 1\}$

רמז: לא קיים $h \in Homeo([0, 1])$ כך ש $h(0) = x$, $0 < x < 1$.

כי x נק' מחלקת עבור $[0, 1]$ ו- 0 לא.



$$\forall 0 < x < y < 1 \quad \exists f \in \text{Homeo}([0,1]) \quad f(x) = y$$

$$\text{שיקוף} \quad \exists f \in \text{Homeo}([0,1]) \quad f(0) = 1$$

ג) 2 מסלולים. מדוע ?

ד) 2 מסלולים. מדוע ?

בסיס לטופולוגיה

נגדיר סימונים חדשים. נניח $\gamma \subseteq P(X)$ (אוסף תת קבוצות ב X). נגדיר:

- $\gamma^\cup := \{\cup\{B : B \in \beta\} \mid \beta \subseteq \gamma\}$ (כל מיני איחודים דרך איברים של γ)
 - $\gamma^{\cap F} := \{\cap\{B : B \in \beta\} \mid \beta \subseteq \gamma, \beta \text{ is finite}\}$ (חיתוכים סופיים דרך איברים של γ)
- תמיד: $\emptyset \in \gamma^{\cap F} \quad \emptyset \in \gamma^\cup \quad \gamma \subseteq \gamma^\cup \quad \gamma \subseteq \gamma^{\cap F}$ (ניקח β קבוצה ריקה)
 למשל אקסיומות טופולוגיה אפשר לכתוב כך:
 $\tau^\cup = \tau \quad (t_3) \quad \tau^{\cap F} = \tau \quad (t_2) \quad \emptyset, X \in \tau \quad (t_1)$

הגדרה: (בסיס $basis$) יהי (X, τ) מ"ט. $\gamma \subseteq \tau$ נקרא **בסיס** (לטופולוגיה τ) אם כל

קבוצה פתוחה (לא ריקה) שווה לאיחוד איברים מ γ .

הערה: (הגדרה שקולה) התנאים הבאים שקולים:

1. γ בסיס לטופולוגיה τ .
2. $\gamma^\cup = \tau$.
3. $\gamma \subseteq \tau$ ולכל $O \in \tau$ ולכל $a \in O$ קיים $G_a \in \gamma$ כך ש $a \in G_a \subseteq O$.

הגדרה: נניח (X, τ) מ"ט. $\alpha \subseteq \tau$ נקרא Pre-base (subbase)

פרה-בסיס (אומרים גם **תת-בסיס**) אם

$$\alpha^{\cap F} \text{ הוא בסיס ל } \tau \quad \text{שקול: } (\alpha^{\cap F})^\cup = \tau$$

הגדרה: אומרים ש- (X, τ) בעל תכונת מנייה שנייה (second countable) ונסמן:

$$(X, \tau) \in B_2$$

אם קיים בסיס γ בן מנייה.

דוגמאות של בסיס טופולוגי: (תשתמשו בהגדרה (3))

• ב $X = \mathbb{R}$ $\gamma_1 = \{(a, b) \mid a < b\}$ וגם $\gamma_2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ בסיסים.

$\gamma_3 = \{(a, \infty), (-\infty, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ פרה-בסיס אבל לא בסיס.

• ב $X = \mathbb{R}^2$

א. $\gamma_0 = \{\text{עיגולים פתוחים}\}$

ב. $\gamma_1 = \{(a, b) \times (c, d)\} = \{\text{"מלבנים" פתוחים}\}$

ג. $\gamma_2 = \{\text{ריבועים פתוחים}\}$ $\gamma_3 = \{\text{משולשים פתוחים}\}$

ד. $\gamma_4 = \{\text{עיגולים פתוחים עם מרכזים בנקודות "רציונליות"}\}$

• $\mathbb{R}^n \in B_2$

כדורים פתוחים עם מרכזים בנקודות "רציונליות" ורדיוסים $\frac{1}{k}$ בן מניה!

• ב (\mathbb{R}, τ_s) (Sorgenfrey Line) כאשר בקבוצה \mathbb{R} מוגדרת טופולוגיה הבאה

$$\tau_s := \{O \subseteq \mathbb{R} : x \in O \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 [x, x + \varepsilon) \subseteq O\}$$

אז $\gamma = \{[a, b) \mid a < b\}$ בסיס. **תבדקו שכל $[a, b)$ היא קבוצה סגורה** ב (\mathbb{R}, τ_s) .

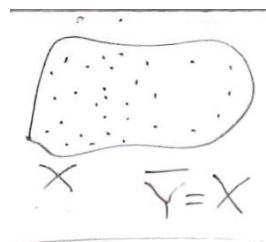
• לכל (X, d) "כדורים פתוחים" בסיס לטופולוגיית $top(d)$.

א. $\gamma := \{B_r(a)\}_{a \in X, r > 0}$ $\gamma^\cup = top(d)$ (ראו משפט: "כדורים בסיס").

ב. גם $\gamma_1 := \{B_{\frac{1}{n}}(a)\}_{a \in X, n \in \mathbb{N}}$ מהווה בסיס.

טענה: (תרגול) לכל (X, d) ולכל $\bar{Y} = X$ (כלומר Y צפוף ב X) $\gamma_2 := \{B_{\frac{1}{n}}(a)\}_{a \in Y, n \in \mathbb{N}}$ מהווה

בסיס ל $top(d)$.



תוצאה חשובה: אם מרחב מטרי (X, d) הוא ספרבילי אז הוא גם B_2 .

$$(X, d) \in B_2 \Leftrightarrow (X, d) \in Sep$$

טענה: הוכיחו ש B_2 תכונה תורשתית.

רמז: תבדקו שאם γ בסיס ל (X, τ) ו $Z \subseteq X$ תת קבוצה אז $\gamma_Z := \{G \cap Z \mid G \in \gamma\}$ בסיס לתת מרחב (Z, τ_Z) .

טענה: לכל מרחב דיסקרטי (X, τ_{discr}) אוסף כל הנקודונים $\gamma_0 = \{\{x\} \mid x \in X\}$ הוא בסיס ל (X, τ_{discr}) . לכל בסיס אחר γ מתקיים $\gamma_0 \subseteq \gamma$.

הסיקו: $(X, \tau_{discr}) \in B_2 \Leftrightarrow |X| \leq \aleph_0$.

למשל: $(\mathbb{R}, \tau_{discr}) \notin B_2$.

משפט: $B_2 \subset Sep$.

הוכחה: נניח γ בסיס בן מנייה במ"ט (X, τ) . צריך למצוא תת קבוצה צפופה בת מניה.

בה"כ $\emptyset \notin \gamma$. לכל $G \in \gamma$ נבחר נקודה אחת בלבד $y_G \in G$. נגדיר $Y_\gamma := \{y_G \mid G \in \gamma\}$. אז Y_γ בת מניה (כי γ ב"מ) ו צפופה ב X . אכן נוכיח $cl(Y_\gamma) = X$.

לכל $O \in \tau$ ולכל $a \in O$ קיים $G_a \in \gamma$ כך ש $a \in G_a \subseteq O$. לפי הבנייה קיים $y_G \in G_a$ לכן $y_G \in Y_\gamma \cap O \neq \emptyset$.

זה מוכיח שכל נקודה $a \in X$ שייכת לסגור של Y_γ . ז"א $cl(Y_\gamma) = X$.

☺

תוצאה 1: $B_2 \cap Metr = Sep \cap Metr$.

תוצאה 2: במרחבים מטריזביליים – ספרביליות כן תורשתית.

הסבר: כי B_2 תורשתית ...

טענה: $l_\infty \notin Sep$ (קיים מרחב בןך לא ספרבילי).

הסבר: (l_∞, d_{sup}) תת מרחב מטרי \hookrightarrow $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, d_\Delta)$ לא ספרבילי
 סדרות בינאריות

(מרחב דיסקרטי ספרבילי אם"ם הוא בן מניה)

הערה 1: $B_2 \neq Sep$.

קו סורגנפרי מקיים: $(\mathbb{R}, \tau_s) \in Sep$, $(\mathbb{R}, \tau_s) \notin B_2$.

הערה 2: ספרביליות לא תורשתית (גם במרחבים יחסית טובים).

למשל: * "מישור סורגנפרי" $(\mathbb{R}, \tau_s)^2 \in Sep$ אבל יש תת מרחב לא ספרבילי (נלמד).

בסיס מקומי

הגדרה: $\beta \subseteq N(a)$ נקרא **בסיס מקומי** בנקודה a , אם לכל $U \in N(a)$

קיים $V \in \beta$ כך ש $V \subseteq U$.

הגדרה: אומרים ש- (X, τ) בעל **תכונת מנייה ראשונה**, ונסמן: $(X, \tau) \in B_1$

אם לכל נקודה $a \in X$ קיים בסיס מקומי בן מנייה.

דוגמה: לכל (X, d) דוגמאות לבסיס מקומי בנקודה a

$$\beta_1 := \{B_r(a)\}_{r>0}$$

$$\beta_2 := \left\{ B_{\frac{1}{n}}(a) \right\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ בן מנייה!}$$

$$\beta_3 := \{B[a, \frac{1}{n}]: n \in \mathbb{N}\}$$

תוצאה: $Metriz \subset B_1$

דוגמה: $(X, \tau_{discr}) \in B_1$.

הסבר נוסף: לכל $a \in (X, \tau)$ היא נקודה מבודדת אם"ם נקודון $\alpha := \{a\}$ הוא בסיס מקומי.

הרצאה 8

טענה: נניח X קבוצה ו γ אוסף תת קבוצות ב X . התנאים הבאים שקולים:

1. γ בסיס לטופולוגיה מסוימת.

2. א. $X \in \gamma^\cup$

ב. חיתוך של 2 קבוצות מ γ אפשר להציג כאיחוד של קבוצות מ γ .

הערה: ב שקול ל ב* : $\forall A, B \in \gamma \forall x \in A \cap B \exists C \in \gamma \quad x \in C \subseteq A \cap B$

ב* שקול ל ב** : $\gamma^{\cap F} \subseteq \gamma^\cup$.

הוכחה: נגדיר אוסף $\tau := \gamma^\cup$. מ"ל τ טופולוגיה.

$$\emptyset, X \in \tau \quad (t_1)$$

הסבר: $X \in \tau$. בגלל תנאי א. תנאי $\emptyset \in \tau$ נובע מהתכונה הנ"ל על γ^\cup .

$$\tau^{\cap F} = \tau \quad (t_2)$$

הסבר: $\tau^{\cap F} = (\gamma^\cup)^{\cap F} = (\gamma^{\cap F})^\cup \subseteq (\gamma^\cup)^\cup = \gamma^\cup = \tau$

$$\tau^\cup = \tau \quad (t_3)$$

הסבר: $\tau^\cup = (\gamma^\cup)^\cup = \gamma^\cup = \tau$.

⊙

הערה: מקרה פרטי חשוב לתנאי ב בטענה הוא "סגירות לגבי חיתוכים סופיים" ($\gamma^{\cap F} = \gamma$)

נשתמש בנושא של מכפלות טופולוגיות.

דוגמה: $\gamma := \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

$$[a_1, b_1) \cap [a_2, b_2) = [a_3, b_3) \quad a_3 := \max\{a_1, a_2\}, b_3 := \min\{b_1, b_2\}$$

לכן $\gamma^{\cap F} = \gamma$.

תזכורת:

הגדרה: $\beta \subseteq N(a)$ נקרא **בסיס מקומי** בנקודה a , אם לכל $U \in N(a)$

קיים $V \in \beta$ כך ש $V \subseteq U$.

הגדרה: אומרים ש- (X, τ) בעל תכונת מנייה ראשונה, ונסמן: $(X, \tau) \in B_1$ אם לכל נקודה $a \in X$ קיים בסיס מקומי בן מנייה.

דוגמה: לכל (X, d) דוגמאות לבסיס מקומי בנקודה $a - a$

$$\beta_1 := \{B_r(a)\}_{r>0}$$

$$\beta_2 := \left\{B_{\frac{1}{n}}(a)\right\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{! בן מנייה}$$

$$\beta_3 := \{B[a, \frac{1}{n}]: n \in \mathbb{N}\}$$

תוצאה: $Metriz \subset B_1$

דוגמה: $(X, \tau_{discr}) \in B_1$.

הסבר: לכל $a \in (X, \tau)$ היא נקודה מבודדת אם"ם נקודון $\alpha := \{a\}$ הוא בסיס מקומי.

הערה:

- מספיק לבדוק רציפות פונקציה דרך בסיס.
- מספיק לבדוק רציפות בנקודה עבור סביבות מבסיס מקומי.
- מספיק לבדוק התכנסות סדרות עבור סביבות מבסיס מקומי

תרגיל: B_1 תכונה תורשתית.

טענה: $B_2 \subset B_1$

הסבר: נניח γ בסיס בן מנייה במ"ט (X, τ) . לכל $a \in X$ נגדיר $\gamma_a := \{A \in \gamma \mid a \in A\}$.

אז γ_a בסיס מקומי בנקודה a .

דוגמה: $B_2 \neq B_1$

$$\begin{cases} (\mathbb{R}, \tau_{discr}) \in B_1 \\ (\mathbb{R}, \tau_{discr}) \notin B_2 \end{cases}$$

הערה: $Discrete \subset Metriz \subset B_1$

$Metriz \cap Sep \subset B_2 \subset B_1$

הגדרה: $\dim(X) = 0 \stackrel{def}{=} \text{קיים בסיס } \gamma \text{ לטופולוגיה כך שכל } A \in \gamma \text{ קבוצה סגורה.}$

הגדרה כללית: *Menger-Urysohn* (ראו גם [עבודת סמינר](#) לסטודנטים)

עבור מרחבים עם $X \in T_3$ מגדירים:

- $\dim(\emptyset) = -1$
- $\forall A \in \gamma \quad \dim \partial(A) \leq 0$ אם קיים בסיס γ כך ש $\dim X \leq 1$
- $\forall A \in \gamma \quad \dim \partial(A) \leq n$ אם קיים בסיס γ כך ש $\dim X \leq n + 1$

הערה: מסמנים יותר ב $ind X$ (inductive dimension).

דוגמאות: ... $\dim \mathbb{R}^n = \dim S_n = n$

משפט: אם $X \in T_1$ וגם $\dim(X) = 0$ אז $X \in T_{3\frac{1}{2}}$.

הוכחה: נניח $cl(B) = B, a \notin B, a \in X$.

על מנת לבדוק $X \in T_{3.5}$ צ"ל קיימת הפרדה פונקציונלית של a ו B .

$a \in B^c \in \tau$. לכן לפי הגדרת מימד אפס (ושל בסיס) קיימת קבוצה סגוה O כך ש $a \in O \subseteq B^c$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in O \\ 1, & x \notin O \end{cases}, f: X \rightarrow \mathbb{R}$$

רציפה! (4 מקרים ראינו הוכחה דומה).

ברור שהפונקציה מפרידה a ו B .



טענה: אם $\dim X = 0, X \in T_1$ אז X בלתי קשיר לחלוטין.

הוכחה: תשתמשו ברעיון של המשפט הקודם. לכל תת קבוצה $A \subseteq X$ ששונה מנקודון קיימת פונקציה רציפה $f: A \rightarrow \{0,1\}$ על. לכן A לא קשירה.



דוגמאות:

א. $\dim(X, \tau_{discr}) = 0$

τ_{discr} בסיס לעצמו ומוכב מקבוצות סגורות.

ב. $\dim(\mathbb{Q}) = 0$

בסיס שמורכב מקבוצות סגורות. $\gamma := \{(a, b) \cap \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Q}^c\}$

ג. $\dim(\mathbb{Z}, d_p) = 0$

כל כדור הוא סגור ב (\mathbb{Z}, d_p) (בעצם גם בכל מרחב אולטרהמטרי)

Sorgenfrey line $\dim(\mathbb{R}, \tau_s) = 0$. ד

תזכורת: $O \in \tau_s \stackrel{def}{=} x \in O \Rightarrow \exists \epsilon = \epsilon_x > 0: [x, x + \epsilon_x) \subset O$

תכונות קו סורגנפריי: (\mathbb{R}, τ_s) $\tau_s := \{O \subseteq \mathbb{R} : x \in O \Rightarrow \exists \epsilon > 0 [x, x + \epsilon) \subseteq O\}$

$(\mathbb{R}, \tau_s) \in T_2$ •

$O = \bigcup_{x \in O} [x, x + \epsilon_x)$ $(\gamma^\cup = \tau_s)$ בסיס $\gamma := \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

• א. $\tau \neq \tau_s$ ב. $\tau \subset \tau_s$

$(a, b) = \bigcup \{[x, x + \epsilon_x) \mid x \in (a, b)\} \in \tau_s$

• $(\mathbb{R}, \tau_s) \in B_1$ בסיס מקומיבן מניה $\{[a, a + \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\} \subset N_{\tau_s}(a)$

• $(\mathbb{R}, \tau_s) \in Sep$ $cl_{\tau_s}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$

• **טענה:** $(\mathbb{R}, \tau_s) \notin B_2$

הוכחה: נניח בשלילה שקיים בסיס γ כ τ_s כך ש γ בן מנייה.

$[x, x + 1) \in \tau_s$ פתוחה, לכן הוא שווה לאיחוד איברים מבסיס γ .

אז קיים $A_x \in \gamma$ כך ש $A_x \subset [x, x + 1)$

נבחר A_x כזה ונגדיר העתקה $\mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \gamma \quad x \mapsto A_x$

φ חח"ע $(x \neq y \Rightarrow A_x \neq A_y)$.

$$2^{\aleph_0} = \aleph = |\mathbb{R}| = |\varphi(\mathbb{R})| \leq |\gamma|$$

מכאן $|\gamma| < 2^{\aleph_0}$, לכן γ לא בת מנייה!

• $(\mathbb{R}, \tau_s) \notin Metriz$ (כי הוא ספרבילי ללא B_2)

• $\dim(\mathbb{R}, \tau_s) = 0$. בסיס γ מורכב מקבוצות סגורות. \Leftarrow

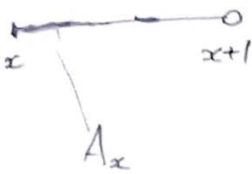
• $(\mathbb{R}, \tau_s) \in T_{3\frac{1}{2}}$ (נובע מהתכונה הקודמת והמשפט שהוכחנו).

קשר בין עקרון Heine ותכונת B_1

הגדרה: אומרים שמ"ט X הוא בעל **תכונת FU** (Frechet – Urysohn) אם:

$$\forall A \subseteq X: scl(A) = cl(A)$$

הערה: $Metriz \subset B_1 \subset FU$



הערה: למדנו דוגמה של מ"ט שהוא לא FU .

טענה: $B_1 \subseteq FU$.

הוכחה מקוצרת: שימו לב שאם $X \in B_1$ אז לכל נקודה יש בסיס מקומי בן מנייה

(חיתוכים סופיים רקורסיבית) לקבלת בסיס מקומי מונטוני. אפשר "לתקן" כל בסיס מקומי בן מנייה $\alpha = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ מונטוני (ז"א $U_{n+1} \subseteq U_n$).
ואז ההמשך דומה למקרה של מ"מ ...

משפט (עיקרון Heine מתוקן): נניח $(X, \tau) \xrightarrow{f} (Y, \sigma)$ פו' בין מ"ט. נניח ש- $(X, \tau) \in FU$ (למשל: $(X, \tau) \in B_1$) אין הגבלה על Y . אז התנאים הבאים שקולים:

(1) רציפה. f

(2) f שומרת על התכנסות (ז"א $f(scl(A)) \subseteq scl(f(A))$).

הוכחה: (1) \Leftrightarrow (2) תמיד (ממשפט $\frac{1}{2}$ Heine).

(1) \Leftrightarrow (2):

$$f(cl(A)) \stackrel{\subseteq}{=} f(scl(A)) \stackrel{\subseteq}{=} scl(f(A)) \stackrel{\subseteq}{=} cl(f(A))$$

תמיד מתקיים נתון תמיד מתקיים

☺

תוצאה: עיקרון Heine נכון עבור קו $Sorgenfrey$ $(\mathbb{R}, \tau_s) \xrightarrow{f} (Y, \sigma)$ (כתחום הפונקציה) כי $(\mathbb{R}, \tau_s) \in B_1 \subset FU$.

הערה: בטופולוגיה, באנליזה ... יש צורך אמיתי ב"סדרות מוכללות":

(M, \leq) קבוצה סדורה חלקית **מכוונת** (לכל $a, b \in M \exists c \in M$ $a \leq c, b \leq c$).

סדרה מוכללת או רשת ([generalized sequence or net](#)) היא פונקציה $(M, \leq) \xrightarrow{f} X$ (סדרה רגילה: $(\mathbb{N}, \leq) \xrightarrow{f} X$).

דוגמה חשובה: כל בסיס מקומי β (לנקודה a) דוגמה לקבוצה סדורה מכוונת.

אם לכל $V \in \beta$ נבחר באיבר $x_V \in V$ אז נקבל $a = \lim\{x_V : V \in \beta\}$

דרך רשתות אפשר לתת תיאור של $cl(A)$.

$z \in cl(A) \Leftrightarrow z$ גבול של סדרה מוכללת

ואז יש הכללת עיקרון Heine ...

שימו לב: למשל **אינטגרלים** זה סוג של גבול (אבל לא גבול רגיל!)

דרך סדרות מוכללות מסיימות.

ספר מומלץ: ד. ליבוביץ, טופולוגיה קבוצתית, האוניברסיטה הפתוחה.

(subbase) Pre-base

הגדרה: נניח (X, τ) מ"ט. $\alpha \subseteq \tau$ נקרא פרה-בסיס (אומרים גם תת-בסיס) אם

$$(\alpha^{\cap F})^{\cup} = \tau \quad \text{שקול:} \quad \tau \text{ הוא בסיס ל } \alpha^{\cap F}$$

דוגמאות:

(1) כל בסיס הוא פרה-בסיס.

(2) $X = \mathbb{R}$ (א) $\alpha := \{(-\infty, b), (a, \infty)\}$. $a, b \in \mathbb{R}$ (או $a, b \in \mathbb{Q}$).

$$\alpha \text{ פרה-בסיס אבל לא בסיס! } \alpha^{\cap F} \subset \alpha^{\cap 2} \subset \alpha^{\cap F}$$

בסיס ל- \mathbb{R}

הגדרה: לכל קבוצה **סדורה לינארית** (X, \leq) אפשר להגדיר

τ_{\leq} "interval topology"

$$\tau_{\leq} = (\alpha^{\cap F})^{\cup} \quad \alpha := \{(-\infty, b), (a, \infty) \mid a, b \in X\}$$

עם פרה-בסיס

$$\alpha = \{(a, b) \times \mathbb{R}, \mathbb{R} \times (c, d)\} \quad X = \mathbb{R}^2 \text{ (ב)}$$

כאשר $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ (או $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$) הוא פרה-בסיס.

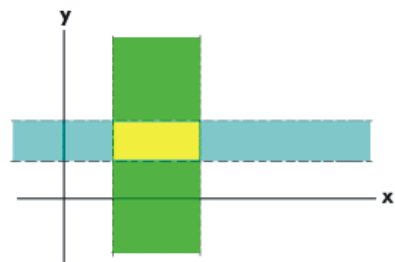


Fig. 2

טענה: נניח $X, Y \in TOP$ ונתונה פונקציה $f: X \rightarrow Y$.

$\alpha \subset \tau_Y$ פרה-בסיס. אז התנאים הבאים שקולים:

1. f רציפה.
2. $\forall U \in \alpha: f^{-1}(U) \in \tau_X$.

הסבר:

(1) \Leftrightarrow (2): בגלל קריטריון 2 של הרציפות.

(1) \Leftrightarrow (2): צ"ל $\tau_X: f^{-1}(O) \in \tau_X, \forall O \in \tau_Y$.

מצד שני, α תת בסיס ל τ_Y , לכן $O \in \tau_Y = (\alpha^{\cap F})^{\cup}$

$f^{-1}(O) \in \tau_X$ כי ה"מקור" שומר על \cap_F וגם על \cup .

■

תוצאה: התנאים הבאים שקולים :

1. $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה.

2. $f^{-1}(-\infty, b), f^{-1}(a, \infty)$ פתוחות לכל $a, b \in \mathbb{Q}$ (או $a, b \in \mathbb{R}$).

הסבר: דוגמה 2 + הטענה.

■

טענה: נניח $\alpha \subset P(X)$ כך ש α כיסוי ל X . אז α הוא פרא-בסיס לטופולוגיה $\tau := (\alpha^{\cap F})^{\cup}$.

הסבר:

$(t_1) \tau, \emptyset \in \tau, X \in \alpha^{\cup}$ (כי נתון ש α כיסוי).

$(t_2) \tau = ((\alpha^{\cap F})^{\cup})^{\cap F} = ((\alpha^{\cup})^{\cap F})^{\cap F} = (\alpha^{\cup})^{\cap F} = (\alpha^{\cap F})^{\cup} = \tau$

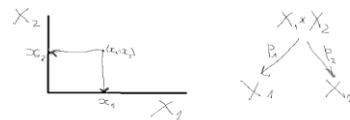
$(t_3) \tau^{\cup} = ((\alpha^{\cap F})^{\cup})^{\cup} = (\alpha^{\cap F})^{\cup} = \tau$

■

מכפלה טופולוגית (מס' סופי של הגורמים)

$(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ מ"ט. איך מגדירים "טופולוגיה טבעית" על

$(X_1 \times X_2, \tau_{\Pi} = ?)$ $X = X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) | x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\} = \prod_{i \in \{1,2\}} X_i$



כללי יותר: $\tau_{\Pi} = ?$ על $X = X_1 \times \dots \times X_n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_i \in X_i\} = \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} X_i$

רעיון: מגדירים טופולוגית מכפלה כטופולוגיה הכי חלשה, שמבטיחה רציפות של הטלות

$$p_k : \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} X_i \rightarrow X_k \quad p_k(x_1, \dots, x_n) = x_k$$

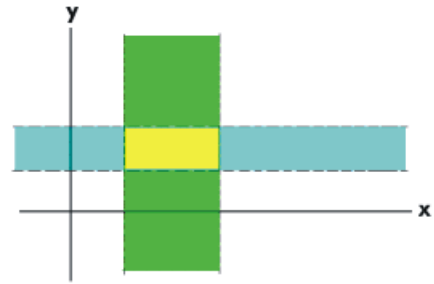


Fig. 2

$$\{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \mid x_1 \in O_1\} = p_1^{-1}(O_1) = O_1 \times X_2$$

$$p_2^{-1}(O_2) = X_1 \times O_2$$

$$(O_1 \times X_2) \cap (X_1 \times O_2) = p_1^{-1}(O_1) \cap p_2^{-1}(O_2) = \underbrace{O_1 \times O_2}_{\text{"מלבן פתוח"}}$$

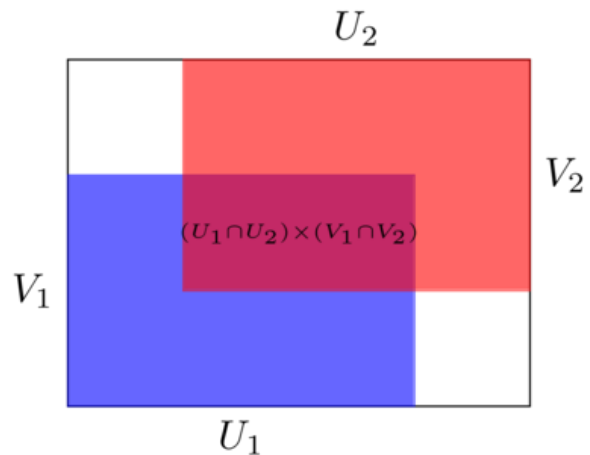
. $O_1 \times O_2 \in \tau_\pi$ אז גם חיתוך (סופי) $X_1 \times X_2$ על מנת להבטיח את הרציפות.

$$.O_1 \times O_2 \in \tau_\pi \quad (\text{סופי})$$

הגדרה: $\gamma := \{O_1 \times \dots \times O_n \mid O_i \in \tau_i\}$ "תיבות בסיסיות"

"מלבנים פתוחים" $\gamma := \{O_1 \times O_2 \mid O_1 \in \tau_1, O_2 \in \tau_2\}$ במקרה של $n = 2$

מקיים את התנאים: $\gamma^{\cap F} = \gamma, X \in \gamma$



$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$$

לכן (לפי הטענה) γ בסיס לטופולוגיה מסוימת γ^{\cup} . נגדיר

$$\tau_{\Pi} = \gamma^{\cup}$$

שקול: $O \in \tau_{\Pi} \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n) \in O \Rightarrow \exists O_i \in \mathcal{N}(x_i) \quad O_1 \times \dots \times O_n \subseteq O$

משפט: $X = (\prod_{i \in \{1, \dots, n\}} X_i, \tau_{\Pi})$ מ"ט ו τ_{Π} הכי חלשה, שמבטיחה רציפות של הטלות

$$p_i : (\prod_{i \in \{1, \dots, n\}} X_i, \tau_{\Pi}) \rightarrow (X_i, \tau_i) \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$$

בסיס סטנדרטי $\gamma := \{O_1 \times \dots \times O_n \mid O_i \in \tau_i\}$ "תיבות בסיסיות". $\tau_{\Pi} = \gamma^{\cup}$

פרה-בסיס סטנדרטי $\alpha := \{p_i^{-1}(O_i) = X_1 \times \dots \times O_i \times \dots \times X_n \mid O_i \in \tau_i\}$ "תיבות אלמנטריות"

אז

$$\alpha^{\cap F} = \gamma \quad \tau_{\Pi} = (\alpha^{\cap F})^{\cup}$$

$I^1 \times I^1 = I^2$	
$I^1 \times I^2 = I^3$	
$S^1 \times I^1 = \text{Cylinder}$	
$S^1 \times S^1 = \text{Torus}$	

טורוס n -ממדי $S_1^n = S_1 \times \dots \times S_1 \simeq T^n$

הוא בעל מימד n קומפקטי (לכן לא הומיאומורפי ל \mathbb{R}^n) אבל לכל נקודה יש סביבה

שהומיאומורפית ל \mathbb{R}^n (ז"א T^n **לוקלית** הומיאומורפי ל \mathbb{R}^n).

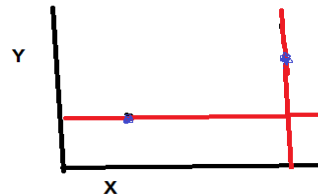
מ"ל עבור $n = 1$ (מדוע ?)

מספר תכונות:

- אם γ_1 בסיס של X_1 ו γ_2 בסיס של X_2 אז $X_1 \times X_2$ בסיס של $\gamma_1 \times \gamma_2 := \{O_1 \times O_2 : O_1 \in \gamma_1, O_2 \in \gamma_2\}$.
- אם α_1 בסיס לוקלי של X_1 בנקודה x_1 ו α_2 בסיס לוקלי של X_2 בנקודה x_2 אז $X_1 \times X_2$ בסיס לוקלי של $\alpha_1 \times \alpha_2 := \{U_1 \times U_2 : U_1 \in \alpha_1, U_2 \in \alpha_2\}$ בנקודה (x_1, x_2) .
- אם A_1 צפוף ב X_1 ו A_2 צפוף ב X_2 אז $A_1 \times A_2$ צפוף ב $X_1 \times X_2$.
- $\forall a \in X_1, b \in X_2 \quad X_1 \times \{b\} \simeq X_1 \quad \{a\} \times X_2 \simeq X_2$

תרגילים מומלצים: (אם יהיה קשה ראו כאן)

1. $X \times Y \in B_2 \Leftrightarrow X, Y \in B_2$
 2. $X \times Y \in B_1 \Leftrightarrow X, Y \in B_1$
 3. $X \times Y \in Sep \Leftrightarrow X, Y \in Sep$
 4. $X \times Y \in Conn \Leftrightarrow X, Y \in Conn$
- רמז דרך התמונה:



הערה: תכונה טופולוגית נקראת "כפליית סופית" אם היא נשמרת לגבי מכפלה טופולוגית סופית.

5. $\Delta := \{(x, x) : x \in X\} \Leftrightarrow X \in T_2$ סגור במרחב מכפלה $X \times X$.
6. אם $f : X \rightarrow Y$ ו $Y \in T_2$ רציפה אז הגרף $Gr(f)$ סגור ב $X \times Y$.
שאלה: האם יש קשר בין שני התרגילים הקודמים?
7. לכל פונקציה רציפה $f : X \rightarrow Y$ מתקיים ש

$$X \simeq \underbrace{Gr(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}}_{\text{תת מרחב טופולוגי}} \subset X \times Y$$

8. * Sorgenfrey plane $(\mathbb{R}, \tau_s) \times (\mathbb{R}, \tau_s)$ ספרבילי אבל מכיל תת מרחב לא ספרבילי.

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \simeq \{1, 2\} \times \mathbb{R} \quad 9$$

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \simeq S_1 \times \mathbb{R} \quad 10$$

11. נניח \leq סדר לינארי על קבוצה X ו τ_{\leq} טופולוגית הסדר

עם פרה-בטיס $\alpha := \{(-\infty, b), (a, \infty) : a, b \in X\}$ ז"א $((\alpha^{\cap F})^\cup = \tau_{\leq}$
 הוכיחו:

א. $(X, \tau_{\leq}) \in T_2$

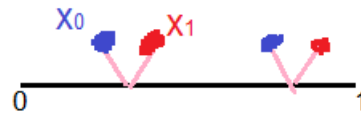
ב. יחס הסדר $\{(x, y) \in X \times X : x \leq y\}$ סגור במרחב מכפלה $X \times X$.

ג. אם $\forall n \in \mathbb{N} x_n \leq y_n, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$

אזי $x \leq y$.

12. (שאלת אתגר) בקבוצה $X := [0, 1] \times \{0, 1\}$ נגדיר Lexicographic Order

$$(a, b) \leq_L (c, d) \Leftrightarrow a < c \text{ or } a = c, b \leq d$$



נדמין "שהחלפנו" כל נקודה $x \in [0, 1]$ בשתי נקודות x_0, x_1 עם הסדר $x_0 < x_1$

(כאשר מסמנים $x_0 := (x, 0), x_1 := (x, 1)$)

הוכיחו:

א. $(X, \tau_{\leq_L}) \in Sep \cap B_1 \cap T_2$.

ב. נקודות $(0, 0), (1, 1)$ הן מבודדות.

ג. (X, τ_{\leq_L}) מכיל תת מרחב שהומיאומורפי לקו סורגנפרי.

ד. (X, τ_{\leq_L}) לא מטריזבילי.

הערה 1: למרחב $([0, 1] \times \{0, 1\}, \tau_{\leq_L})$ יש שמות שונים בספרות:

double arrow, split interval (לעיתים "מורידים" נקודות מבודדות)

הערה 2: קיימות הכללות מעניינות וחשובות באישומים.

למשל: נניח (K, \leq) רבוצה עם סדר לינארי. לכל תת קבוצה $A \subseteq K$ אפשר להגדיר

קבוצה סדורה לנארית חדשה $K_A := K \times \{0\} \cup A \times \{1\}$ עם **סדר לקסיקוגרפי**.

אינטוויטיבית זה המצב שמפצלים נקודות רק מהקבוצה A .

למשל: תבדקו שאם ניקח קבוצה סדורה $[0, 1]_{\{\frac{1}{2}\}}$ (מפצלים רק נקודה אחת $\frac{1}{2} \in [0, 1]$) אז נקבל מרחב

טופולוגי הומיאומורפי ל ("סכום" של שני קטעים סגורים)



הרצאה 9

הגדרה: נניח (G, \cdot) חבורה ו- (G, τ) מ"ט.

אומרים ש- $(G, \cdot, \tau) \in TGr$ חבורה טופולוגית (Topological Group) אם מתקיימים:

א. "כפל" $(a, b) \mapsto a \cdot b$ פונקציה רציפה. $G \times G \rightarrow G$

(שקול: $(\forall a_1, a_2 \in G \forall U \in N(ab) \exists V_1 \in N(a_1), V_2 \in N(a_2) \quad V_1 V_2 \subseteq U$)

ב. "ההיפוך": $a \mapsto a^{-1}$ פונקציה רציפה. $G \rightarrow G$

(שקול: $(\forall a \in G \forall U \in N(a) \quad U^{-1} \in N(a^{-1}))$)

דוגמאות:

- כל מרחב נורמי $(E, \|\cdot\|)$ מגדיר חבורה טופולוגית $(E, +, \tau_{\|\cdot\|})$
- $(\mathbb{Z}, +, top(d_p))$
- טורוס T^n חבורה טופולוגית קומפקטית (מה היא הפעולה ?)
- $GL(n, \mathbb{R})$
- כל חבורה בטופולוגיה דיסקרטית

הערה: בהגדרת TGr - (א) \neq (ב).

דוגמה: $(\mathbb{R}, +, \tau_s)$ בטופולוגית סורגנפרי.

תזכורת: $\mathbb{R} \ni 0 \in \tau_s \stackrel{def}{=} \forall x \in 0 \exists \epsilon > 0: [x, x + \epsilon) \subseteq 0$

למשל $\tau_s \ni [0, 1)$ פתוחה אבל לא $(-1, 0]$ (שהוא מקור של $[0, 1)$).

הסבר נוסף: $\lim \frac{1}{n} = 0$ but $\lim(-\frac{1}{n}) \neq 0$

תרגיל: נניח G ח"ט. אז כל הזזה ימנית $T_a : G \rightarrow G, T_a(x) = xa$

הומיאומורפיזם (ז"א $T_a \in Homeo(G)$) (נכון גם לשמאלית $T_a(x) = ax$).

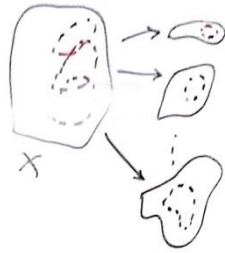
הסיקו שכל ח"ט היא הומוגנית.

הערה: על חבורות טופולוגיות באתר <http://u.math.biu.ac.il/~megereli/seminar.html> ראו

קבצים: [TGrEx.pdf](#) [TGrNotes070217.pdf](#) [IntroTopGr.pdf](#)

הגדרה: טופולוגיה חלשה (Weak Topology).

נניח X קבוצה. $(X_i, \tau_i) \in TOP$, $i \in I$ מ"ט ונתונה משפחה של פונקציות $f_i: X \rightarrow X_i$. אז



קיימת טופולוגיה τ_w על X כך ש

- א. $(X, \tau_w) \xrightarrow{f_i} (X_i, \tau_i)$ רציפות.
 - ב. בהינתן σ – טופולוגיה מסוימת על X כך ש
 - ג. $(X, \sigma) \xrightarrow{f_i} (X_i, \tau_i)$ רציפות מתקיים $\sigma \supseteq \tau_w$.
- (ז"א τ_w היא הכי חלשה כך שמתקיים א').

τ_w נקראת "טופולוגיה חלשה". הגדרה פורמלית:

$$\tau_w = (\alpha^{\cap F})^U$$

$$\alpha := \{f_i^{-1}(O_i) \mid O_i \in \tau_i, i \in I\}$$

לפי הבנייה α פרה-בסיס ל- τ_w ו- $\alpha^{\cap F}$ בסיס ל- τ_w .

דוגמאות של "טופולוגיה חלשה": מכפלה, תת-מרחב, טופולוגיה נקודתית, טופולוגיה שמוגדרת ע"י משפחת פסאודו-מטריקות, טופולוגיה חלשה במרחבים נורמיים ...

משפט: (טופולוגיה חלשה)

נניח (Y, σ) מ"ט ונתונה פונקציה $g: Y \rightarrow X$.

כמו קודם, τ_w מסמן טופולוגיה חלשה מעל X לגבי $\{f_i\}_{i \in I}$.

אזי $(Y, \sigma) \xrightarrow{g} (X, \tau_w)$ רציפות $\Leftrightarrow (Y, \sigma) \xrightarrow{f_i \circ g} (X_i, \tau_i)$ רציפות.

הוכחה:

(\Rightarrow) : ברור, כי הרכבה שומרת על רציפות.

(\Leftarrow) :

צ"ל $(Y, \sigma) \xrightarrow{g} (X, \tau_w)$ רציפה.

ש"ל $\forall O \in \tau_w: g^{-1}(O) \in \sigma$.

מ"ל (על פרה-בסיס α). ז"א כאשר

$$\exists i \in I: f_i^{-1}(O_i) = O \in \alpha$$

$$(f_i \circ g)^{-1}(O_i) = g^{-1}(f_i^{-1}(O_i)) = g^{-1}(O)$$

פתוחה בגלל רציפות של $f_i \circ g$.

■

תוצאה: τ_w הטופולוגיה הכי חלשה כך ש...

הסבר: זה נובע מהמשפט. אם ניקח $Y = X \xrightarrow{g=id} (X, \tau_w)$ מהרציפות נקבל $\sigma \supseteq \tau_w$.

מקרים פרטיים של טופולוגיה חלשה:

• **תת מרחב טופולוגי:**

$$(Y, ?) \xhookrightarrow{i} (X, \tau) \quad (Y \text{ תת קבוצה של } X)$$

$$\tau_Y = \tau_w$$

שווה לטופולוגית תת מרחב (שכבר הגדרנו!).

$$\forall O \in \tau \subseteq X: i^{-1}(O) = O \cap Y \quad \text{שימו לב:}$$

• **מכפלה טופולוגית של n גורמים** $(X_i, \tau_i) \quad i \in \{1, \dots, n\}$

$$X = \left(\prod_{i \in \{1, \dots, n\}} X_i, \tau_{\Pi} \right) \quad \text{מ"ט } \tau_{\Pi} \text{ הכי חלשה, שמבטיחה רציפות של הטלות}$$

$$p_i : \left(\prod_{i \in \{1, \dots, n\}} X_i, \tau_{\Pi} \right) \rightarrow (X_i, \tau_i) \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$$

$$\tau_{\Pi} = (\alpha^{\cap})^{\cup} \quad \text{מתקיים } \tau_w = \tau_{\Pi} \text{ טופולוגית מכפלה כפי שהגדרנו!}$$

כאשר $\alpha := \{p_i^{-1}(O_i) = X_1 \times \dots \times O_i \times \dots \times X_n \mid O_i \in \tau_i\}$ פרה-בסיס "תיבות אלמנטריות".

• הגדרה: **מכפלה טופולוגית (אין הגבלה)** $(X_i, \tau_i) \quad i \in I$

$$X = \left\{ I \xrightarrow{x} \bigcup_{i \in I} X_i, x(i) \in X_i \right\} = \prod_{i \in I} X_i \xrightarrow{p_i} (X_i, \tau_i)$$

מכפלה קרטזית (כקבוצה). איבר טיפוס "וקטור מוכלל" $x = (x_i)_{i \in I}$ (פונקציות)

$$\text{היטלים: } p_{i_0}(x) = x(i_0) = x_{i_0}$$

מגדירים $\tau_w = \tau_\Pi = (\alpha^{\cap F})^\cup$ (טופולוגיה חלשה (Tychonoff)).

$\alpha := \{p_i^{-1}(O_i) \mid O_i \in \tau_i\}$ פרה-בסיס סטנדרטי

$\gamma := \alpha^{\cap F} = \{\bigcap_{j \in J} p_j^{-1}(O_j) \mid \text{סופי } J \subseteq I, O_j \in \tau_j\}$ בסיס סטנדרטי

הערות על מכפלה קרטזית $X = \prod_{i \in I} X_i$ והיטלים $\prod_{i \in I} X_i \xrightarrow{p_i} X_i$

$$\text{א. } p_i^{-1}(O_i) = O_i \times \prod_{j \in I \setminus \{i\}} X_j$$

$$\text{ב. } p_i^{-1}(O_i) \cap p_k^{-1}(O_k) = O_i \times O_k \times \prod_{j \in I \setminus \{i,k\}} X_j$$

$$\text{ג. } p_k\left(\bigcap_{i \in J} p_i^{-1}(O_i)\right) = \begin{cases} O_k & \text{if } k \in J \\ X_k & \text{if } k \notin J \end{cases}$$

ד. $O \in \tau_\Pi \Leftrightarrow x = (x_i)_{i \in I} \in O \Rightarrow \exists \text{ finite } J \subseteq I \exists O_j \in \tau_j \ x \in \bigcap_{i \in J} p_i^{-1}(O_j) \subseteq O$

שימו לב: תנאי $x \in \bigcap_{i \in J} p_i^{-1}(O_j)$ שקול ל $\forall j \in J \ x_j \in O_j$.

• **טופולוגיה המוגדרת דרך משפחת פסאודו-מטריקות:**

א. תזכורת: אם ρ פסאודו מטריקה מעל קבוצה X אז

$$\text{top}(\rho) = \{\rho \text{ פתוחות במובן } \rho\} = \{B_\rho(x, r) \mid x \in X, r > 0\}^\cup = \gamma^\cup$$

ב. בניח שנתונה משפחה $\{\rho_i\}_{i \in I}$ של פסאודו-מטריקות על אותה קבוצה X .

מגדירים $\tau_w(\{\rho_i\}_{i \in I})$ כטופולוגיה חלשה של אוסף הפונקציות הזהות:

$$\left\{ X \xrightarrow{id} (X, \text{top}(\rho_i)) \right\} \quad (\forall i: f_i = id \text{ "ז" א"א})$$

$$\text{לכן } \tau_w = (\alpha^{\cap F})^\cup$$

כאשר $\alpha := \{B_{\rho_i}(x, r) \mid x \in X, r > 0, i \in I\}$

"כדורים" פרה-בסיס ל τ_w .

• **טופולוגיה נקודתית** על $X = C[0,1]$ (ניתן להכללות):

עבור $t \in [0,1]$ נגדיר פסאודו-מטריקה $\rho_t(f_1, f_2) = |f_1(t) - f_2(t)|$. נקבל

$$\{\rho_t\}_{t \in [0,1]}$$

↓

$$\tau_w(\{\rho_t\}_{t \in [0,1]}) =: \tau_p$$

טופולוגיה זו נקראת **טופולוגיה נקודתית** (*pointwise topology*).

הערה: $(C[a, b], \tau_p) \not\subseteq top(d_{max})$

המרחב $(C[a, b], \tau_p)$ הוא לא מטריזבילית אבל חשוב באנליזה.

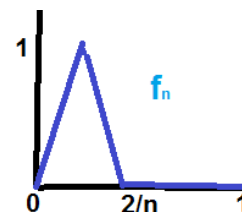
אוסף γ קבוצות הבאות:

$$\gamma = \{V_{\varepsilon, p_1, p_2, \dots, p_n}(g) : g \in C[a, b], \varepsilon > 0, p_1, p_2, \dots, p_n \in [a, b]\}$$

$$V_{\varepsilon, p_1, p_2, \dots, p_n}(g) = \{f \in C[a, b] : |f(p_k) - g(p_k)| < \varepsilon\}$$

הוא בסיס לטופולוגיה τ_p .

$\tau_p \neq top(d_{max})$. למשל סדרת הפונקציות $f_n \in C[0,1]$ הבאה (עם $f_n(\frac{1}{n}) = 1$)



מתכנסת בטופולוגיה נקודתית τ_p לפונקצית האפס θ (כאשר $\theta(x) = 0$ לכל $x \in [a, b]$).

ראו שכל סביבה של θ מהטיפוס של γ מכילה כמעט כל האיברים של הסדרה.

אבל אין התכנסות בטופולוגיה של $top(d_{max})$ כי $d(f_n, \theta) = 1$ (לא שואף לאפס).

הגדרה: $f : X \rightarrow Y$ נקרה **שיכון טופולוגי** אם פונקציה מושרת $f : X \rightarrow f(X)$ הומיאומורפיזם.

• **טופולוגיה p-אדית:**

$$top(d_p) = \tau_w \left\{ \mathbb{Z} \xrightarrow{f_n} \mathbb{Z}_{p^n, discr} \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$f = \Delta_{n \in \mathbb{N}} f_n : (\mathbb{Z}, d_p) \rightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{p^n} \quad f(x) = (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$$

מגדיר שיכון טופולוגי בתוך מכפלה טופולוגית.

($\mathbb{Z}_p^n = \{0, 1, \dots, p^n - 1\}$ מסמן חבורה ציקלית סופית דיסקרטית עם p^n איברים).

• **טופולוגיה חלשה על מרחב Hilbert** ($l_2, \|\cdot\|$) היא טופולוגיה המושרית מאוסף של

הפונקציונלים $\{f_a : l_2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f_a(x) = \langle a, x \rangle : a \in l_2\}$
 הערה: "כדור סגור" $B_r[\theta]$ קומפקטי בטופולוגיה חלשה הנ"ל. לעומת זאת $B_r[\theta]$
 לא קומפקטי בטופולוגיה מרחב נורמי ($l_2, \|\cdot\|$) (נלמד!).

טענה: נניח $f_i : Y_i \rightarrow X_i \quad \forall i \in I$ פונקציות רציפות.

הוכיחו "שפונקציה המכילה" $f := \prod_{i \in I} f_i$ הבאה היא רציפה

$$f : \prod_{i \in I} Y_i \rightarrow \prod_{i \in I} X_i \quad f((y_i)_{i \in I}) = (f_i(y_i))_{i \in I}$$

הוכחה: הרעיון הוא להשתמש במשפט "טופולוגיה חלשה".

נגדיר $Y := \prod_{i \in I} Y_i, X = \prod_{i \in I} X_i$. נסמן ההטלות ב p_i^Y, p_i^X . אז יש לנו פונקציה

$f : Y \rightarrow X$ כך ש $p_i^X \circ f = f_i \circ p_i^Y$. נתון ש f_i רציפות. לכן גם $f_i \circ p_i^Y$ ששווה ל $p_i^X \circ f$. לפי המשפט הנ"ל אפשר להסיק ש f רציפה.



תוצאה: אם כל גורם $f_i : Y_i \rightarrow X_i$ הומואומורפיזם אז גם $f : Y \rightarrow X$.

$$Y_i \simeq X_i \Rightarrow \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} Y_i \simeq \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} X_i$$

דוגמה: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z} \simeq (-1, 1) \times (0, 7) \times (5, \infty) \times \mathbb{N}^2$

תרגיל: $S_2 \setminus \{z\} \simeq (0, 1) \times (2, 4)$

הסבר: נזכיר $S_2 \setminus \{z\} \simeq \mathbb{R}^2$ $\forall z \in S_2$ היטל סטראוגרפי.

מצד שני, $\mathbb{R}^2 \simeq (0, 1) \times (2, 4)$ בגלל הטענה הקודמת ו- $\mathbb{R} \simeq (a, b)$.

תרגיל: $X \times Y \simeq Y \times X$

נסו להוכיח וגם להכליל למקרה של n גורמים ותמורות. למשל

$$X_1 \times X_2 \times X_3 \simeq X_3 \times X_2 \times X_1$$

משפט: נניח $f_i : Y \rightarrow X_i$ פונקציות רציפות. אז "פונקצית האלכסון" $f := \Delta_{i \in I} f_i$

$$f : Y \rightarrow X = \left(\prod_{i \in I} X_i, \tau_{\Pi} \right) \quad f(y) = (f_i(y))_{i \in I} \quad \text{הבאה}$$

היא רציפה ומתקיים $\forall k \in I \quad f_k = p_k \circ f$.

הוכחה: $\forall y \in Y \quad (p_k \circ f)(y) = p_k(f(y)) = p_k(f_i(y))_{i \in I} = f_k(y)$

נתון ש f_k רציפות (והוכחנו $f_k = p_k \circ f$). לכן לפי המשפט "טופולוגיה חלשה" גם f .

☺

דוגמה: $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], f_1(t) = \cos t \quad f_2 : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], f_2(t) = \sin t$

$$f = f_1 \Delta f_2 : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1] \times [-1, 1], f(t) = (\cos t, \sin t) \quad f(\mathbb{R}) = S_1$$

הגדרה: פונקציה $f : X \rightarrow Y$ נקראת פתוחה אם תמונה של ת"ק פתוחה היא פתוחה. באופן דומה מגדירים פונקציה סגורה.

דוגמאות:

- נניח $f : X \rightarrow Y$ פונקציה רציפה חח"ע ועל. אז הפונקציה הומיאומורפיזם אם היא סגורה (פתוחה).
קחו בחשבון $(f^{-1})^{-1} = f$ וקריטריונים לרציפות.
- הפונקציה הנ"ל $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{T}$ היא לא פתוחה ולא סגורה.
- $f : [0, 3] \rightarrow [0, 1] \quad f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1] \\ 1 & x \in [1, 3] \end{cases}$ רציפה על (וסגורה, נלמד !)
- **לא פתוחה** כי $X = (2, 3)$ פתוחה ב $[0, 3]$ אבל $f[0, 3] = \{1\}$ לא פתוחה ב $Y = [0, 1]$
- היטל $p_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1$ רציפה, על, פתוחה, אבל **לא סגורה** כי $A = \{(x, \frac{1}{x}) \mid x > 0\}$ סגורה ב \mathbb{R}^2 אבל $p_1(A) = (0, \infty)$ לא סגורה ב \mathbb{R} .

משפט: (פתיחות הטלות)

כל הטלה $p_i : \left(\prod_{i \in \{1, \dots, n\}} X_i, \tau_{\Pi} \right) \rightarrow (X_i, \tau_i)$ היא פונקציה פתוחה.

הוכחה: צ"ל $\forall O \in \tau_{\Pi} \quad p_k(O) \in \tau_k$

אם $O \in \gamma$ תיבה בסיסית אז

$$\exists \text{ finite } J \subseteq I \quad O = \bigcap_{i \in J} p_j^{-1}(O_j)$$

$$p_k(O) = p_k\left(\bigcap_{i \in J} p_j^{-1}(O_j)\right) = \begin{cases} O_k & \text{if } k \in J \\ X_k & \text{if } k \notin J \end{cases} \quad \text{נשתמש בשוויון ג}$$

התמונה היא פתוחה. זה מוכיח מקרה של $O \in \gamma$.

במקרה כללי קחו בחשבון ש γ בסיס ל τ_{\prod} ותשתמשו ב t_3 (כל פונקציה שומרת איחודים).



אזהרה: מכפלה קרטזית אינסופית של קבוצות פתוחות לא תמיד פתוחה (בעצם אם ורק אם פתוחה אם כמעט כל הגורמים הם מרחבים עצמם בהתאמה).

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ לא פתוחה ב } \left(\frac{1}{2}, 3\right)^{\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2}, 3\right) \times \left(\frac{1}{2}, 3\right) \times \dots$$

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ לא פתוחה ב } (a, b)^{\mathbb{N}}$$

$$X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \quad \text{הסבר:}$$

$$(X_n, \tau_n) = \mathbb{R} \quad I = \mathbb{N}$$

אם נניח בשלילה ש $(a, b)^{\mathbb{N}}$ פתוח, אז $(a, b)^{\mathbb{N}} \in \tau_{\pi} = \gamma^{\cup}$. לכן

$\leftarrow (a, b)^{\mathbb{N}}$ מכיל תיבה בסיסית לא ריקה.

לכן הוא מכיל $\dots \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times O_m \times O_2 \times O_1 \supseteq (a, b) \times (a, b) \times \dots$

אבל זה גורר $\mathbb{R} \supseteq (a, b)$, סתירה!

טענה שימושית: במכפלה סופית אם γ_i בסיס ל τ_i אז $\gamma_1 \times \dots \times \gamma_n$ בסיס ל τ_{\prod} .

עבור מכפלה אינסופית: $\{\bigcap_{j \in J} p_j^{-1}(O_j) \mid J \subseteq I, O_j \in \gamma_j\}$

תרגיל: הוכיחו:

$$א. \quad cl\left(\prod_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} cl(A_i) \quad \text{לכל } A_i \subseteq (X_i, \tau_i) \text{ (אין הגבלה על } I).$$

$$ב. \quad int(A_1 \times A_2) = int(A_1) \times int(A_2) \quad \text{(נכון לכל מספר סופי)}.$$

$$ג. \quad int\left(\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \neq \prod_{i \in \mathbb{N}} int(A_i) \quad \text{תנו דוגמה שבה}$$

שאלה חשובה: מתי תכונה נשמרת ע"י מכפלה טופולוגית (סופית, אינסופית) ?

- (תמיד ללא הגבלת מספר הגורמים)
- $T_0, T_1, T_2, T_3, T_{3.5}$, קשירות, קשירות מסילתית, קומפקטיות (משפט *Tychonoff*) ...
- (מכפלות סופיות ובנות מניה)
- $\dots, Sep, B_1, B_2, Metr, \dots$
- (מכפלות סופיות)
- $discr$, קומפקטיות מקומית (נלמד !)

הערה: דיסקרטיות לא נשמרת ע"י מכפלה אינסופית (אפילו בת מניה).

למשל $C \simeq \{0,1\}^{\mathbb{N}} \notin discr$ (נלמד !)

הערה: מכפלה סופית שומרת על מטריזביליות (נכון גם למכפלה בת מניה).

$$(X_1, \rho_1), (X_2, \rho_2) \in Metr$$

$$\rightarrow \left(X_1, \underbrace{top(\rho_1)}_{\tau_1} \right), \left(X_2, \underbrace{top(\rho_2)}_{\tau_2} \right) \in TOP$$

טענה: יש התאמה עם הגדרת טופולוגית τ_{π} "מטריקת מכפלה".

(א) "מטריקה בסגנון אוקלידס"

$$d(x, y) := \sqrt{\rho_1(x_1, y_1)^2 + \rho_2(x_2, y_2)^2}$$

$$d_1(x, y) := \rho_1(x_1, y_1) + \rho_2(x_2, y_2) \quad (ב)$$

$$d_{max}(x, y) := \max\{\rho_1(x_1, y_1), \rho_2(x_2, y_2)\} \quad (ג)$$

תרגיל:

$$X := X_1 \times X_2 \quad n \quad d \sim d_1 \sim d_{max} \quad (א)$$

$$\underbrace{top(d)}_{(א) \Rightarrow} = \underbrace{top(d_1)}_{(א) \Rightarrow} = \underbrace{top(d_{max})}_{(א) \Rightarrow} = \tau_{\pi} \quad (ב)$$

טופולוגית מכפלה

מטריזציה במקרה של מכפלה בן מניה:

$$X = \prod_{i \in \mathbb{N}} (X_i, \rho_i) = X_1 \times X_2 \times \dots$$

$$d(x, y) := \sup \left\{ \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{1 + \rho_i(x_i, y_i)} \mid i \in \mathbb{N} \right\}$$

אחת מהאפשרויות.

הרצאה 10

קומפקטיות "הכללה גאונית של סופיות"

הגדרה מרחב טופולוגי (X, τ) הוא **קומפקטי** אם לכל כיסוי פתוח $X = \bigcup_{i \in I} O_i$ שלו יש תת כיסוי סופי (ז"א קיימים $O_{i_1}, O_{i_2}, \dots, O_{i_n}$ כך ש $X = O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \dots \cup O_{i_n}$).
סימון: $(X, \tau) \in \text{Comp}$.

הגדרה שקולה (קריטריון FIP תכונת החיתוך הסופי)

נניח $\{A_i : i \in I\}$ קבוצת סגורות ב (X, τ) כך ש $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$. אז קיימים

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_n} = \emptyset$$

הערה: קומפקטיות חשובה מאוד, בין היתר, "במשפטי קיום".

תכונות ודוגמאות:

- כל מרחב **סופי** הוא קומפקטי.
- $\text{Comp} \ni (X, \tau_{\text{cofinite}})$

הסבר: קבוצה קוסופית היא מכסה כמעט הכל פרט למספר סופי של נקודות.

$$X \text{ is finite} \Leftrightarrow (X, \tau_{\text{discr}}) \in \text{Comp}$$

הסבר: $\{\{x\} : x \in X\}$ כיסוי פתוח של X ...

משפט: אם (X, d) מ"מ כך ש $(X, \text{top}(d)) \in \text{Comp}$. אז (X, d) **סומ**.

הוכחה: ניקח $z \in X$, אז $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n(z)$ כיסוי פתוח.

יש תת כיסוי סופי ואז $\exists n_0 : X = B_{n_0}(z)$. לכן $\text{diam } X \leq 2n_0$.



תוצאה: $\mathbb{R}^n, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N} \notin \text{Comp}$, כל מרחב נורמי (לא מנוון).

הגדרה: תת קבוצה Y במרחב X נקראת **קומפקטית** אם $(Y, \tau_Y) \in \text{Comp}$.

משפט (קריטריון לתת קבוצה קומפקטית) התנאים הבאים שקולים:

א) Y תת קבוצה קומפקטית ב X .

ב) לכל אוסף $\alpha = \{O_i\}_{i \in I}$ של קבוצות פתוחות ב X שמכסה את Y (ז"א $Y \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$) קיים תת אוסף סופי $\{O_j\}_{j \in J}$, $J \subseteq I$ סופי שמכסה את Y (ז"א $Y \subseteq \bigcup_{j \in J} O_j$).

הסבר: נובע מהגדרת תת מרחב טופולוגי.

• איחוד סופי תת קבוצות קומפקטיות גם קומפקטי.

הערה: לפי משפט Heine-Borel (נוכיח בהמשך):

תת מרחב X של \mathbb{R}^n קומפקטי אם ורק אם X סגור וחסום ב \mathbb{R}^n .

תרגיל: תת קבוצה $Q \cap [0,1]$ סגורה וחסומה ב Q אבל לא קומפקטית. זה אפשר להוכיח דרך הגדרה או דרך משפט Heine-Borel (לא סגור ב \mathbb{R})

תרגיל: ת"ק $Y = [0,1]$ בקו סורגנפרי (\mathbb{R}, τ_s) לא קומפקטית.

פתרון: נקודון $\{1\}$ מבודד ב Y . כיסוי $\alpha := \bigcup_{n \geq 2} [0, \frac{n-1}{n}] \cup \{1\}$ כיסוי פתוח ("בעייתי") של Y ללא תת כיסוי סופי. (שימו לב: $\{1\} = [1,2) \cap [0,1]$ בתת מרחב $[0,1]$ של (\mathbb{R}, τ_s))

הערה: קומפקטיות לא תורשתית $\underbrace{(0,1)}_{\notin Comp} \subset \underbrace{[0,1]}_{\in Comp}$

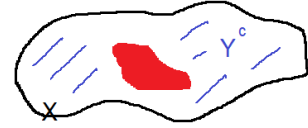
הסבר: $\alpha := \{(\frac{1}{n+1}, 1) : n \in \mathbb{N}\}$ כיסוי פתוח "בעייתי" (ללא תת כיסוי סופי) של $(0,1)$
הסבר שקול (דרך FIP) $\alpha := \{(0, \frac{1}{n+1}) : n \in \mathbb{N}\}$ משפחת קבוצות סגורות עם FIP אבל

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, \frac{1}{n+1}] = \emptyset$$

יש תורשתיות קומפקטיות לגבי תת קבוצות סגורות.

משפט: נניח $X \in Comp$, $Y \subseteq X$ תת קבוצה סגורה. אז גם $Y \in Comp$.

הוכחה:



נניח $\alpha = \{O_i\}_{i \in I}$ אוסף קבוצות פתוחות ב X כך ש $Y \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$
הרעיון: להוסיף Y^c (קבוצה פתוחה) לאוסף α ואז מתקבל אוסף חדש $\alpha^* = \alpha \cup \{Y^c\}$. הוא בעצם כיסוי פתוח של X .

$X \in Comp \Leftrightarrow$ קיים תת כיסוי סופי $\gamma \supseteq \alpha^*$. Y^c לא משתתף בכיסוי של Y לכן אם מורידים Y^c מ α^* (בתנאי שהוא נמצא שם) אז עדיין נקבל כיסוי של Y . לכן נקבל תת אוסף סופי ל α (ולא ל α^*) שמכסה את Y . אז $Y \in Comp$ עפ"י קריטריון לתת קבוצות.

■

משפט: תמונה רציפה שומרת על $Comp$.

הוכחה: $X \in Comp$. f רציפה ועל $f(X) = Y$. צ"ל $Y \in Comp$.

נניח $\alpha = \{O_i\}_{i \in I}$ כיסוי פתוח של Y . צ"ל קיים כיסוי סופי.

$$\Leftrightarrow Y = \bigcup_{i \in I} O_i$$

$$X = f^{-1}(\bigcup_{i \in I} O_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(O_i)$$

$\{f^{-1}(O_i)\}_{i \in I}$ כיסוי פתוח של X ($f^{-1}(O_i)$ פתוח בגלל ש f רציפה).

$X \in Comp \Leftrightarrow$ קיים תת כיסוי סופי ל $\{f^{-1}(O_i)\}_{i \in I}$, ז"א קיים $J \subseteq I$ סופי כך ש -

$$X = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(O_j)$$

$$Y = f(X) = f(\bigcup_{j \in J} f^{-1}(O_j)) = \bigcup_{j \in J} f(f^{-1}(O_j)) = \bigcup_{j \in J} O_j \quad \text{אז מכאן}$$

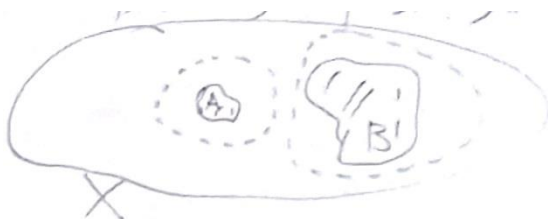
$$(f \circ f^{-1})(A) = A \quad \text{אבל אם } f \text{ על אז } f \circ f^{-1}(A) \subseteq A \quad \text{(תמיד)}$$

מצאנו תת כיסוי סופי $\{O_j\}_{j \in J}$ ל α .

■

תרגיל: נניח $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה. הוכיחו $f([a, b]) = [c, d]$.

משפט (ההפרדה): נניח $X \in T_2$, A, B תת קבוצות קומפקטיות וזרות. אזי קיימת סביבות (פתוחות) זרות.



הוכחה:

מקרה א' $A = \{a\}$

הערה: קל להוכיח בהנחה נוספת אם B סופית (חיתוך סופי).

הרעיון הוא להפעיל את הקומפקטיות של B ...

$$X \in T_2 \Rightarrow \boxed{\forall b \in B \exists U_b \in N(a) \exists V_b \in N(b): U_b \cap V_b = \emptyset}$$

U_b ו V_b סביבות פתוחות.

$\alpha = \{V_b\}_{b \in B}$ כיסוי פתוח של תת קבוצה B במרחב X .

בגלל קריטריון (3) \Leftarrow קיים תת כיסוי סופי

$$\exists \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subseteq B: B \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{b_i} \stackrel{\text{נסמן}}{=} V \in N(B)$$

V סביבה פתוחה של B . נגדיר בהתאמה

$$N(a) \ni U := \bigcap_{i=1}^n U_{b_i}$$

מ (t_2) נקבל שזוהי סביבה פתוחה של a . כעת, לכל $i \in \{1, \dots, n\}$

$$U_{b_i} \cap V_{b_i} = \emptyset$$

\Downarrow

$$\left(\bigcap_{i=1}^n U_{b_i} \right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^n V_{b_i} \right) = \emptyset$$

\Downarrow

$$U \cap V = \emptyset$$

הוכחנו את מקרה א'.

מקרה ב' (כללי)

בעזרת שלב א':

$$\forall a \in A \exists U_a \in N(a) \exists V_a \in N(B): U_a \cap V_a = \emptyset$$

כאשר U_a, V_a סביבות פתוחות. $\alpha = \{U_a\}_{a \in A}$ כיסוי פתוח של A במרחב X .

$$X \supseteq A \in Comp$$

לכן שוב לפי הקריטריון יש תת כיסוי סופי

$$\exists \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A: N(A) \ni U := \bigcup_{i=1}^n U_{a_i} \supseteq A$$

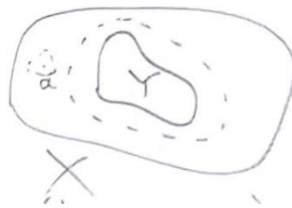
נגדיר $N(B) \ni V := \bigcap_{i=1}^n V_{a_i} \supseteq B$ פתוח בגלל - (t_2) .

$$U_{a_i} \cap V_{a_i} = \emptyset$$

$$\begin{aligned} &\Downarrow \\ &\left(\bigcup_{i=1}^m U_{a_i}\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^m V_{a_i}\right) = \emptyset \\ &\Downarrow \\ &U \cap V = \emptyset \\ &\blacksquare \end{aligned}$$

משפט (הסגירות): נניח $X \in T_2$, $Y \subset X$ תת קבוצה קומפקטית. אזי Y סגורה ב X .

הוכחה:



ניקח $a \notin Y$ (בה"כ קיימת!).

צ"ל $a \notin \bar{Y}$.

לפי משפט ההפרדה, קיימות סביבות פתוחות זרות $U \in N(a), V \in N(Y)$ כך ש

$$U \cap V = \emptyset$$

$$U \cap Y = \emptyset$$

ולכן $a \notin \bar{Y}$ ולכן Y סגור.

■

$$X \in T_4 \Leftrightarrow \begin{cases} X \in T_2 \\ X \in Comp \end{cases} \quad \text{משפט (הנורמליות):}$$

$$Comp \cap T_2 \subset T_4 \quad \text{ניסוח שקול:}$$

הוכחה: A, B תת קבוצות סגורות זרות. $A, B \in Comp$

(כתת קבוצה סגורה בקומפקטי). אז לפי משפט ההפרדה קיימות סביבות זרות.

■

משפט: (תנאי מספיק לסגירות פונקציות)

נניח $f: X \rightarrow Y, Y \in T_2, X \in Comp$ רציפה. אזי f פונקציה סגורה.

הוכחה:

צ"ל $f(A)$ סגורה ב Y לכל A סגורה ב X .

$$\underbrace{A}_{\text{סגור}} \subseteq X \in \text{Comp}$$

אז לפי משפט שהוכחנו $A \in \text{Comp}$.

לפי משפט תמונה רציפה שומרת על Comp . נקבל (מהתורשתיות של רציפות גם)

$$T_2 \ni Y \ni f(A) \in \text{Comp}$$

$f(A)$ סגור לפי משפט שהוכחנו (סגירות של פונקציה ...).

■

משפט (על השיכון והומיאומורפיזם):

נניח $f: X \rightarrow Y, Y \in T_2, X \in \text{Comp}$ רציפה ו"חח"ע. אזי f שיכון טופולוגי

(ז"א $f: X \rightarrow f(X)$ הומיאומורפיזם).

הוכחה: מ"ל את המשפט בהנחה ש f על. ואז צ"ל f הומיאומורפיזם.

תנאים (1) ו (2) בהגדרת הומיאומורפיזם מתקיימים עפ"י הנתון (ישר).

$$(3) \text{ רציפות של ההופכי } X \xleftarrow{f^{-1}} Y = f(X)$$

לפי קריטריון 3 על רציפות, מספיק להראות ש f פונקציה סגורה. כאן נשתמש במשפט הקודם.

■

הערה: א. במקרה הפרטי, אם בנוסף f על אז נקבל הומיאומורפיזם.

ב. קומפקטיות של X חשובה מאוד. ראינו דוגמאות...

ג. $f(X)$ סגור.

תוצאה: נניח $(X, \tau) \in \text{Comp}$ ו σ טופולוגיה על X עם תכונת T_2 (Hausdorff) כך ש

$$\sigma \subseteq \tau \text{ אז } \sigma = \tau.$$

משפט (הכללת משפט ויירשטרס): נניח $f: X \rightarrow \mathbb{R}, X \in \text{Comp}$ רציפה. אזי f חסומה

ומקבלת Max, Min מוחלטים.

הוכחה:

$\mathbb{R} \supseteq f(X) \in \text{Comp}$ לכן $f(X)$ נשמרת ע"י תמונה רציפה.

$f(X)$ תת מרחב מטרי ב \mathbb{R} , אז $f(X)$ חסומה!

$$\mathbb{R} \ni B := \sup\{f(x) | x \in X\} \in \overline{f(X)}$$

$$\mathbb{R} \ni A := \inf\{f(x) | x \in X\} \in \overline{f(X)}$$

מצד שני, $f(X)$ סגור בגלל משפט הסגירות (כלומר $f(X) = \overline{f(X)}$) ולכן מתקבלים

$$B = \text{Max } f$$

$$A = \text{Min } f$$

■

תרגילים:

(1) נניח (X, d) מ"מ, $A, K \subseteq X$ לא ריקות, $K \in \text{Comp}$. אזי:

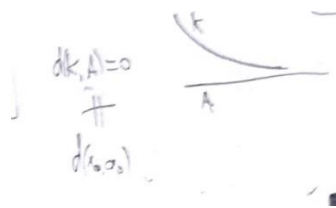
$$\boxed{d(K, A) = d(x_0, A)} \quad \text{א} \quad \text{קיימת נקודה } x_0 \in K \text{ ש}$$

רמז: פונקציית המרחק...

(ב) אם גם $A \in \text{Comp}$, אז $\exists a_0 \in A, \exists x_0 \in K: \boxed{d(K, A) = d(x_0, a_0)}$

דוגמה נגדית (אפילו לקבוצות

סגורות) ב \mathbb{R}^2 :



$$\mathbb{R} \text{ ב } \underbrace{B = \left\{ n + \frac{1}{2n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}}_{\text{סגורות}}, A = \mathbb{N}$$

(לכן \inf לא מתקבל!) $0 = d(A, B) \neq d(a_0, b_0)$

חסימות כליל

הגדרה: נניח נתון $\varepsilon > 0$. תת קבוצה A במרחב מטרי (X, d) נקראת ε -צפופה אם לכל

$$x \in X \text{ קיים } a \in A \text{ כך ש } d(a, x) < \varepsilon.$$

(אומרים ש: a מקרב את x עד כדי ε)

$$\bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(a) = X \text{ הגדרה שקולה:}$$

הגדרה: מ"מ (X, d) נקרא חסום כליל (totally bounded) אם :

לכל $\varepsilon > 0$ נתון קיימת תת קבוצה סופית A_ε שהיא ε -צפופה ב (X, d) .

הגדרה: תת קבוצה Y במ"מ (X, d) נקראת **חסומה כליל** אם מרחב (Y, d_Y) ח"כ.

דוגמה: $Y = [0, 1] \subset \mathbb{R} = X$, אז ת"ק $A_{\frac{1}{n}} = \{\frac{i}{n} : i \in \{0, 1, \dots, n\}\}$ היא $\frac{1}{n}$ -צפופה ב Y

תרגיל: ב $Y = [0, 1] \times [0, 1]$ למצוא ת"ק סופית שהיא $\frac{1}{100}$ -צפופה.

משפט: אם מרחב מטרי (X, d) קומפקטי אז הוא חסום כליל.

הוכחה: לכל $\varepsilon > 0$ נתון לכיסוי פתוח $\bigcup_{a \in X} B_\varepsilon(a) = X$ יש תת כיסוי סופי.

דוגמה: (X, d_Δ) תמיד חסום אבל לא ח"כ עבור X אינסופית.

תכונות:

- מרחב חסום כליל הוא תמיד חסום (אבל לא תמיד ההפך).
- (תושטיות) אם (X, d) חסום כליל אז גם כל תת קבוצה ח"כ.
- איחוד **סופי** של תת קבוצות שכל אחת ח"כ גם ח"כ.
- אם תת מרחב מטרי (Y, d_Y) של מ"מ (X, d) ח"כ אז גם הסגור $cl(Y)$ ח"כ.
- אם $(X_1, \rho_1), (X_2, \rho_2)$ ח"כ אז גם מכפלה $(X_1 \times X_2, \rho)$ עם "מטריקה רוקלידית" הוא גם חסום כליל.

דוגמה: $Y = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ חסום אבל לא ח"כ (ולא קומפקטי) במרחב הילברט $X = l_2$.

תרגיל: $B_r[a]$ לא קומפקטי ב l_2 .

תרגיל: תנו דוגמאות של מ"מ ח"כ שהוא לא קומפקטי.

Spoiler: מ"מ הוא קומפקטי אם"ם הוא ח"כ ושלם (משפט שנוכיח בהמשך).

תזכורת: השלמה $(\mathbb{Z}, d_p) \hookrightarrow (\overline{\mathbb{Z}}, \overline{d}_p)$ כאשר:

$$\overline{\mathbb{Z}} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} b_k p^k, b_k \in \underbrace{\{0, 1, \dots, p-1\}}_{\text{שאריות מודולו } p} = \mathbb{Z}_p \right\} = \{\text{מספרים } p\text{-אדיים}\}$$

שהוא קומפקטי (**Spoiler**). בעצם זאת חבורה טופולוגית קומפקטית.

תרגיל: הוכיחו שמ"מ (\mathbb{Z}, d_p) חסום כליל ולא קומפקטי

הסבר מקוצר: לא קומפקטי כי המרחב לא שלם. למשל הסדרה

$$a_n = 1 + p + p^2 + \dots + p^n$$

היא ס"ק אבל לא מתכנסת (תרגול).

רמז לגבי ח"כ: תת קבוצה $\{0,1,\dots,p^k-1\}$ היא ε -צפופה עבור $\varepsilon = ?$
 ראו תמונות במקרה של $p = 3$

ת"ק $\{0\}$ ε -צפופה לכל $1 < \varepsilon$

ת"ק $A := \{0,1,2\}$ ε -צפופה לכל $\frac{1}{3} < \varepsilon$

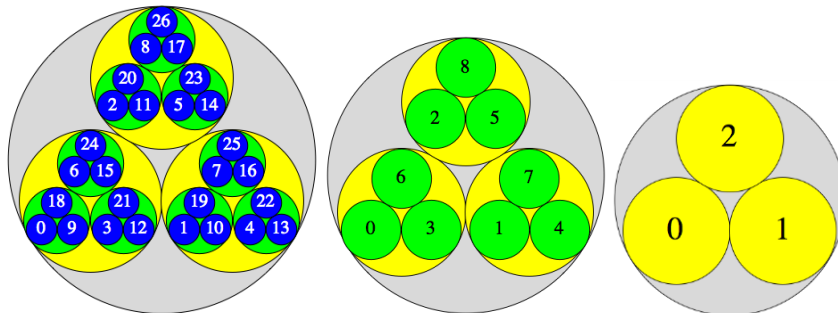
הסבר: שאריות מודולו 3 הן בדיוק $A = \{0,1,2\}$.

לכן לכל $x \in \mathbb{Z}$ קיים $a \in A$ כך ש $3 \mid (x-a)$. מכאן $d_3(x,a) \leq \frac{1}{3}$.

...

ת"ק $A := \{0,1,2,\dots,3^n-1\}$ ε -צפופה לכל $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$ (ראו תמונות למטה)

שאלה: א. כיצד אפשר לדמיין את האיברים של ההשלמה $(\overline{\mathbb{Z}}, \overline{d_3})$ לפי התמונות הבאות?
 ב. בתרגול הראשון למדתם על האולטרה מטריקה של מרחק בין מילים, מה הקשר?



משפט: אם (X, d) מ"מ קומפקטי (ז"א $(X, top(d)) \in Comp$) אזי

א. (X, d) חסום כליל (ולכן גם חסום).

ב. $X \in Sep$

ג. $X \in B_2$

ד. העוצמה של X היא לכל היותר עוצמה של ממשיים.

הוכחה: א. **תזכורת:** לכל ε -כיסוי $\{B(x, \varepsilon) : x \in X\}$ יש תת כיסוי סופי.

ב. כל חסום כליל הוא ספרבילי

(כי אם A_ε סופי ו- ε -צפוף ב (X, d) אז $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{\frac{1}{n}}$ בת מניה וצפופה ב X).

ג. במרחבים מטריזביליים ספרביליות ו B_2 שקולות.

ד. טענה כללית: כל מרחב מטריזבילי וספרבילי הוא בעל עוצמה לכל היותר עוצמה של ממשיים.

הוכחה: ניקח תת קבוצה צפופה (ז"א $cl(A) = X$) בת מניה A ב X .

בגלל המטריזביליות $scl(A) = cl(A)$. לכן נקבל $scl(A) = X$.

לכל איבר $x \in X$ נבחר בסדרה אחת $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ כך ש $x = \lim a_n$, $a_n \in A$. נגדיר פונקציה

$$\sigma: X \rightarrow P(A) \quad \sigma(x) = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$$

זאת פונקציה חח"ע (כי במרחב מטרי הטווח של סדרה מתכנסת קובעת חד משמעית את הגבול. בין היתר, אין תלות בתמורות של איברים בסדרה)

$$\text{לכן } card(X) = card(\sigma(X)) \leq card P(A) \leq 2^{\aleph_0} = card \mathbb{R}$$

סימון: $card(A)$ = העוצמה של A (מהמילה: cardinality)

■

הרצאה 11

הגדרה: נניח $\alpha = \{A_i\}_{i \in I}$ אוסף תת קבוצות בקבוצה X .

(א) $\alpha \in FIP$ תכונת החיתוך הסופי, אם $\bigcap_{j \in J} A_j \neq \emptyset$ לכל $J \subseteq I$ **סופית**.

(ב) $\alpha \in IP$ אם $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

(ברור ב \Leftarrow א).

דוגמה: כל סדרה $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ יורדת $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ של קבוצות לא ריקות היא FIP

למשל: $A_n := \{n, n+1, n+2, \dots\}, n \in \mathbb{N}$

$$\alpha = \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in FIP \setminus IP$$

קריטריון FIP של Comp: נניח X מ"ט. אזי התנאים הבאים שקולים:

$$X \in Comp \quad (1)$$

$$IP \ni \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} FIP \ni \alpha = \{A_i\}_{i \in I} \\ \forall i \in I: A_i \text{ סגורה} \end{cases} \quad (2)$$

הסבר:

שימו לב ש $\{O_i\}_{i \in I}$ כיסוי פתוח של X אם ורק אם האוסף של המשלימים

$\{O_i^c\}_{i \in I}$ (קבוצות סגורות) הוא לא מקיים IP.

$$\bigcup O_i = X \Leftrightarrow \bigcap O_i^c = \emptyset$$

כללי *de Morgan* והגדרת *Comp* ...

■

דוגמה: $\mathbb{R} \notin Comp$ (דרך FIP).

$A_n := [n, \infty), n \in \mathbb{N}$ סגורות ו- $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$

$$\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in FIP \setminus IP$$

דוגמה: $Y = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \notin Comp$

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k = \emptyset \quad A_1 \supset A_2 \supset \dots \quad Y = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, k \leq n\} \text{ סגור ב } Y$$

הערה: באופן דומה אפשר להפריך קומפקטיות כשיש סדרה ללא תת סדרה מתכנסת.

תזכורת: קריטריון החיתוך Cantor לשלמות (מאינפי):

התנאים הבאים שקולים:

(א) (X, d) מ"מ שלם.

(ב) לכל סדרה יורדת $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$

של קבוצות סגורות כך ש $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(A_n) = 0$ מתקיים

$$\{c\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$$

משפט: כל מרחב מטרי (X, d) קומפקטי הוא מ"מ שלם.

הוכחה: (דרך קריטריון קנטור + קריטריון FIP)

נניח נתונה סדרה יורדת של קבוצות סגורות $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ - $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$

כך ש $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(A_n) = 0$ אז

$$\alpha = \{A_n\} \in FIP$$

A_n סגור. לכן בגלל הקומפקטיות אכן $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.

↓

$$\alpha \in IP$$

ואז מקריטריון קנטור נקבל המרחב הוא שלם.

■

משפט (Heine – Borel):

נניח $X \subseteq \mathbb{R}^n$. אזי התנאים הבאים שקולים:

$$(1) X \in Comp$$

(2) X חסום וסגור.

הוכחה:

$$(1) \Leftrightarrow (2)$$

חסימות. כל מ"מ קומפקטי הוא חסום (הוכחנו יותר: ח"כ)

סגירות. $\mathbb{R}^n \in T_2$. נפעיל את משפט הסגירות.

$$(2) \Rightarrow (1)$$

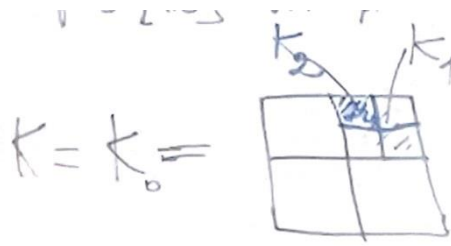
נניח X חסום וסגור. קיימת קובייה $K \supset X$ כך ש $X \subseteq K$

$$K = [a, b]^n \text{ בה"כ}$$

אז לפי *Tychonoff*, $K \in Comp$ (אם ידוע ש $[a, b] \in Comp$).

דרך ב' (Cantor):

נניח בשלילה ש $K \notin Comp$.



ז"א יש כיסוי α פתוח של K ללא תת כיסוי סופי. נחלק תתי קוביות (מספר 2^n) דרך החלוקה של הצלעות. נקרא לתת קובייה – "קובייה בעייתית" אם אין תת כיסוי סופי עבור הכיסוי הנ"ל. אז יש לפחות תת קובייה אחת בעייתית K_1 .

באופן דומה נחלק לתתי קוביות ואז יש תת קובייה $K_2 \supset K_1$ כך ש K_2 בעייתית.

אז נקבל – $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots$

סדרה יורדת של קוביות (סגורות לא ריקות).

$$\text{diam}(K_i) \rightarrow 0$$

\mathbb{R}^n שלם, לכן לפי קריטריון קנטור: יש איבר משותף $\{c\} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i \neq \emptyset$

$c \in K$. לכן קיים איבר מסוים של הכיסוי α $O_j \in \alpha$ כך ש $c \in O_j$

בגלל הפתיחות $\exists r > 0: B_r(c) \subset O_j$

לכן $\exists m \in \mathbb{N}: c \in K_m \subset B_r(c) \subset O_j$

קיבלנו ש K_m מכוסה ע"י איבר אחד O_j של הכיסוי.

לכן K_m לא בעייתית בסתירה לבנייה!

■

הערה: משפט *Heine – Borel* לא נכון אם מחליפים \mathbb{R}^n במרחבים מטריים או נורמיים אחרים (אפילו למרחב הילברט)

דוגמה: במרחב הילברט l_2 יש תת קבוצה חסומה וסגורה לא קומפקטית.

למשל: $A := \{e_1, e_2, \dots\} \subset l_2$ (דיסקרטי אינסופי לכן לא קומפקטי).

משפט (קומפקטיות במרחב מטרי): נניח (X, d) מ"מ. התנאים הבאים שקולים:

$$1) X = (X, \text{top}(d)) \in Comp$$

$$2) X \in SComp \text{ (לכל סדרה יש תת סדרה מתכנסת).}$$

(3) $X \in BW$ (תכונת Bolzano-Weierstrass לכל קבוצה אינסופית ב- X יש נקודת הצטברות).

(4) (X, d) שלם וחסום כליל.

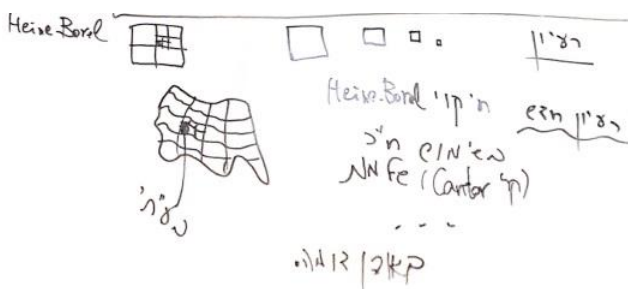
הוכחה:

(4) \leftarrow (1):

דומה למשפט Heine – Borel

(נדלג על הוכחה מפורשת)

(1) \leftarrow (2):



ניח בשלילה שלא, כלומר $X \notin SComp$.

זאת אומרת, קיימת סדרה $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ ללא ת"ס מתכנסת ב- X .

נגדיר $\emptyset \neq A_n := \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$

ברור $\dots \supseteq A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq \dots$ לכן $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in FIP$.

הערה: A_n סגורות. זה נובע מ- \dots

(1) במ"מ ידוע ש- $cl(A) = scl(A)$.

(2) פרמוטציה של סדרה לא משפיעה על ההתכנסות (או אי התכנסות)

(כאשר אנו משתמשים בהגדרת התכנסות דרך – בכל כדור של הגבול יש כמעט כל האיברים).

כעת $\{X \in Comp \mid FIP \ni \{A_n\}\} \Rightarrow \{A_n\} \in IP$

זה גורר שקיימת נקודה $c \in \bigcap A_n \neq \emptyset$.

לכן קיימת תת סדרה קבועה c, c, \dots של הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ (בסתירה להנחה שאין ת"ס מתכנסת).

(2) \leftarrow (3):

ניח $A \subseteq X$ אינסופית. צ"ל $A' \neq \emptyset$.

בגלל אינסופיות קיימת סדרה $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ ב- A עם איברים שונים.

$X \in SComp \Leftrightarrow$ קיימת תת סדרה $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ שמתכנסת ב- X .

$a_{n_k} \wedge \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = b$ שונים

\Downarrow

$b \in A'$

\Downarrow

$A' \neq \emptyset$

(3) ← (2):

נניח $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה ב X . נוכיח שיש ת"ס מתכנסת.
נגדיר $X \supset A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ (תמונה של הסדרה).
אם A סופית אז יש איבר בסדרה שחוזר אינסוף פעם ואז יש תת סדרה קבועה (מתכנסת!).

אם A אינסופית אז לפי הנתון (3) $X \in BW$.

אז קיימת נקודת הצטברות $z \in A'$.

(*) אז קיימת סדרה עם איברים שונים ב A ששואפת ל z .

ע"פ אותה הערה על הפרמוטציות...

בה"כ ניתן להניח שיש תת סדרה של $\{x_n\}$ המקיימת את (*).

לכן קיבלנו ת"ס מתכנסת!

(2) ← (4):

• קודם כל נוכיח שלמות של (X, d)

נניח $\{x_n\}$ סדרת קושי. צ"ל שהיא מתכנסת.

תכונה (2) \Leftrightarrow יש תת סדרה $\{x_{n_k}\}$ שמתכנסת ב X .

תכונה m_3 של מרחבים מטריים \Leftrightarrow אם לסדרת קושי יש ת"ס מתכנסת, אז גם הסדרה מתכנסת.

• כעת נוכיח ש (X, d) ח"כ.

צ"ל שלכל $\varepsilon > 0$ יש תת קבוצה סופית שהיא ε -צפופה (רשת).

נניח בשלילה שקיים $0 < \varepsilon_0$ כך שאין ε_0 -רשת. בונים סדרה ללא ת"ס מתכנסת:

ניקח $x_1 \in X$ אז $X \neq B_{\varepsilon_0}(x_1)$ (אחרת $\{x_1\}$ ε_0 -רשת ב (X, d)).

ניקח $x_2 \neq B_{\varepsilon_0}(x_1)$. אז מתקיים $B_{\varepsilon_0}(x_1) \cup B_{\varepsilon_0}(x_2) \neq X$

אחרת $\{x_1, x_2\}$ ε_0 -רשת (שימו לב: $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon_0$).

נמשיך כך... נקבל סדרה x_1, x_2, x_3, \dots

$$\forall i \neq j: d(x_i, x_j) \geq \varepsilon_0$$

אז ברור שאף ת"ס של $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ לא ס"ק.

זה גורר שלסדרה הנ"ל אין ת"ס מתכנסת!

■

קומפקטיות של מכפלה טופולוגית

משפט: (tube lemma)

נניח X, Y מרחבים טופולוגיים, Y קומפקטי, $a \in X$. אז לכל סביבה פתוחה $W \subset X$ של $\{a\} \times Y$ (במכפלה $X \times Y$) של הפיסה $\{a\} \times Y$ קיימת קבוצה פתוחה $W \subset X$ מספיק קטנה כך ש $\{a\} \times Y \subset W \times Y \subset N$.

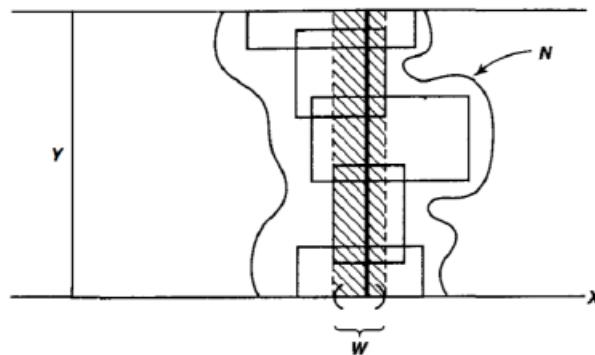
הוכחה: "מלבנים פתוחים" הם בסיס לטופולוגית מכפלה τ_{\prod} לכן לכל $y \in Y$ קיימות סביבות פתוחות $a \in U_y$ (ב X), $y \in V_y$ (ב Y) כך ש

$$(a, y) \in U_y \times V_y \subset N$$

$\{V_y : y \in Y\}$ כיסוי פתוח של Y . בגלל הקומפקטיות של Y יש מספר סופי של איברים $V_{y_1} \cup V_{y_2} \cup \dots \cup V_{y_n} = Y$ כך ש $y_1, y_2, \dots, y_n \in Y$

נגדיר $W := U_{y_1} \cap U_{y_2} \cap \dots \cap U_{y_n}$ (סביבה פתוחה ל a ב X). אזי

$$\{a\} \times Y \subset W \times Y \subset N$$



■

משפט (קומפקטיות של מכפלה סופית): אם X, Y קומפקטי אז גם $X \times Y$.

הוכחה: נניח Ω כיסוי פתוח של $X \times Y$. לכל $x \in X$ הפיסה $\{x\} \times Y \simeq Y$ ת"ק קומפקטית ב $X \times Y$. לכן קיים תת אוסף סופי Ω_x שמכסה את $\{x\} \times Y$. אז

$$\{x\} \times Y \subset \cup \Omega_x$$

לפי "משפט צינור" קיימת קבוצה פתוחה $W_x \subset X$ כך ש

$$\{x\} \times Y \subset W_x \times Y \subset \cup \Omega_x$$

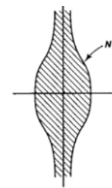
בגלל הקומפקטיות של X קיימים מספר סופי איברים $x_1, \dots, x_n \in X$ כך ש

$$W_{x_1} \cup \dots \cup W_{x_n} = X$$

אז נקבל שנת אוסף סופי $\Omega_{x_1} \cup \dots \cup \Omega_{x_n}$ של Ω מכסה את $X \times Y$.

■

תרגיל: תנו דוגמה נגדית למשפט הצינור אם Y לא קומפקטי. רמז:



Tychonoff Theorem

משפט טיכונוף (1935)

נניח $X = \prod_{i \in I} X_i$ מכפלה טופולוגית. אזי X קומפקטי אם ורק אם כל X_i קומפקטי.

הוכחה:

(כיוון אחד)

אם X קומפקטי אז כל X_i היא גם קומפקטי כתמונה רציפה של X לגבי העתקת ההטלה: $p_i : X \rightarrow X_i$.

(כיוון שני)

דרך א. בעזרת קריטריון קומפקטיות Alexander (דרך תת בסיס).

דרך ב. בעזרת קריטריון קומפקטיות דרך FIP (תכונת החיתוך הסופי).

קריטריון קומפקטיות Alexander :

נניח X מרחב טופולוגי ו β תת בסיס (פרה-בסיס) של הטופולוגיה. אזי X קומפקטי אם ורק אם לכל כיסוי $C \subset \beta$ של X (דרך איברים של β) קיים תת כיסוי סופי.

הוכחה של הקריטריון: (נדלג על ההוכחה)

כיוון אחד ברור (הגדרה של הקומפקטיות).

כיוון שני: נניח מ"ט X ופרה-בסיס שלו β מקיימים את התנאי של Alexander.

צ"ל ש X קומפקטי. נניח בשלילה שלא. אז קיים כיסוי פתוח C של X ללא תת כיסוי סופי.

נקרא לכיסוי פתוח "בעייתי" אם אין תת כיסוי סופי.

בה"כ ניתן להניח ש C הוא כיסוי בעייתי מכסימלי.

הערה: מכסימליות פירושה הדבר – אין גדול ממנו (ולא בהכרח הכי גדול) ז"א כל כיסוי פתוח של X המכיל את C ושונה ממנו הוא לא בעייתי.

הסבר: על מנת להוכיח הקיום של כיסוי כזה נשתמש בלמה של צורן.

שימו לב שאם נתון שרשרת של כיסויים בעייתיים אזי האיחוד הוא גם בעייתי.

בגלל המכסימליות של C הוא מקיים את התכונה הבאה:

(*) אם O קבוצה פתוחה שלא שייכת ל C אז $C \cup \{O\}$ לא בעייתי ולכן קיים תת אוסף סופי C_0 של C

כך ש $C_0 \cup \{O\}$ מכסה את X .

האוסף $C \cap \beta$ הוא לא מכסה את X

(אחרת תנאי של Alexander גורר ש C לא בעייתי).

לכן קיימת נקודה $z \in X$ כך ש z לא מכוסה ע"י $C \cap \beta$.

קיים $U \in C$ כך ש $z \in U$ (כי C כיסוי).

לפי הגדרת תת בסיס ($\beta^{\cap F}$ הוא בסיס) קיימים מספר סופי של איברים

$$z \in \bigcap_{i=1}^n S_i \subset U \text{ כך ש } S_1, \dots, S_n \in \beta$$

אך S_1, \dots, S_n לא שייך ל C (כי אחרת $C \cap \beta$ מכסה את z).

לכן ע"פ תכונת (*) הנ"ל לכל $1 \leq i \leq n$ קיים תת אוסף סופי C_i כך ש $C_i \cup \{S_i\}$ מכסה את X .

נסמן: $G_i := \cup \{A : A \in C_i\}$. אז $S_i \cup G_i = X$ ונקבל

$$U \cup \left(\bigcup_{i=1}^n G_i \right) \supseteq \left(\bigcap_{i=1}^n S_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^n G_i \right) \supseteq \bigcap_{i=1}^n (S_i \cup G_i) = X$$

ז"א תת אוסף סופי $\bigcup_{i=1}^n C_i \cup \{U\}$ של C מכסה את X . סתירה! זה מוכיח את הקריטריון.

בעזרתו נוכיח כיוון שני של משפט Tychonoff

בתפקיד של פרה-בסיס β ב $X = \prod_{i \in I} X_i$ ניקח **תיבות אלמנטריות**.

$\alpha := \{p_i^{-1}(O_i) \mid O_i \in \tau_i\}$ פרה-בסיס סטנדרטי. המקורות של קבוצות פתוחות מכל גורם

X_i . נניח בשלילה ש X לא קומפקטי. אז לפי קריטריון Alexander קיים תת אוסף C של α

כך ש C הוא **כיסוי בעייתי** (ללא תת כיסוי סופי) של X . נציג אותו $C = \bigcup_{i \in I} C_i$ כאשר כל C_i

מורכב מתיבות אלמנטריות שבאות מגורם X_i . לפי ההנחה C_i לא מכיל תת כיסוי סופי של

X . אזי $p_i(C_i)$ לא מכיל תת כיסוי סופי של X_i (אחרת, מקורות מתאימים כיסוי סופי של X).

אבל X_i קומפקטי ו- $p_i(C_i)$ אוסף של קבוצות **פתוחות**. לכן $p_i(C_i)$ הוא לא כיסוי של X_i

קיימת נקודה $x_i \in X_i$ שלא מכוסה ע"י $p_i(C_i)$. אזי הנקודה $x := (x_i) \in \prod_{i \in I} X_i$

לא מכוסה ע"י (כיסוי) C של X . סתירה! מכאן מש"ל.



הערה: כיוון שני אפשר להוכיח בדרכים נוספות:

דרך ב. בעזרת קריטריון קומפקטיות FIP (תכונת החיתוך הסופי)

דרך ג. ואולטרה-פילטרים (על-מסנן).

ראו: טופולוגיה קבוצתית, האוניברסיטה הפתוחה (ד. לייבוויץ).

תוצאות:

• $[0,1]^S \in Comp$ קובית Tychonoff (לכל קבוצה S)

• $[0,1]^N \in Comp$ קובית Hilbert

תרגיל: הוכיחו ש $f: [0,1]^N \rightarrow l_2, f(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = ((x_1, \frac{1}{2}x_2, \dots, \frac{1}{n}x_n, \dots))$

שיכון טופולוגי של קובית הילברט לתוך מרחב הילברט. רמז: מ"ל רציפות (מדוע?)

• Cantor $\{0,1\}^N = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \dots \in Comp$ קובית

דוגמה חשובה (מרחב קנטור)

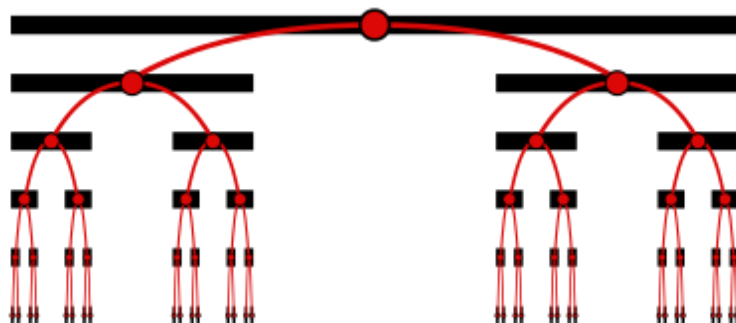
תזכורת: ידוע שקבוצת קנטור היא $C := \{c \in [0,1] : c = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i}, c_i \in \{0,2\}\}$

סגורות $C = \bigcap_n C_n, C_0 = [0,1], C_n = \frac{1}{3}C_{n-1} \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_{n-1})$ חיתוך של קבוצות סגורות



משפט: קבוצת קנטור C הומיאומורפי עם מרחב מכפלה $\{0,1\}^N = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \dots$

הוכחה: שקול להוכיח $C \simeq \{0,2\}^N$



נגדיר פונקציה $f: \{0,2\}^{\mathbb{N}} \rightarrow C$ $f(x_1, x_2, \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}$

אזי f חח"ע (יחידות ההצגה הנ"ל). גם פונקציה על (ברור).

$\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ קומפקטי לפי משפט Tychonoff.

לכן בגלל משפט על ההומיאומורפיזם מ"ל f רציפה בכל נקודה $a = (a_1, a_2, \dots) \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}$

מ"ל לכל $\varepsilon > 0$ קיימת סביבה $O \in N(a)$ כך ש

$$x \in O \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

נבחר $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש $\sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} < \varepsilon$ ונגדיר **תיבה בסיסית**

$$O := \{a_1\} \times \{a_2\} \times \dots \times \{a_{n_0}\} \times \{0,2\} \times \{0,2\} \times \dots$$

אז ברור $O \in N(a)$ ולכל $x = (a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots) \in O$ מתקיים:

$$|f(x) - f(a)| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \right| = \left| \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{x_i - a_i}{3^i} \right| \leq \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} < \varepsilon$$

■

תרגיל: הוכיחו ש:

$$1. C^2 \simeq C, C^n \simeq C, C^{\mathbb{N}} \simeq C^{\mathbb{Z}} \simeq C$$

2. * C הומוגני.

מידע נוסף על קבוצת קנטור (Cantor set everywhere):

- כל מרחב קומפקטי מטריזבילי הוא תמונה רציפה של קבוצת קנטור.
- למשל: $f: C \rightarrow [0,1]$ $f\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2} \cdot \frac{1}{2^i}$ ($x_i \in \{0,2\}$) (מדוע היא לא חח"ע?)
- כל מרחב מטרי קומפקטי מטריזבילי בעל מימד אפס ללא נקודות מבודדות הומיאומורפי עם קבוצת קנטור (למשל השלמת (\mathbb{Z}, d_p)).
- מרחב קנטור $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ חשוב גם באינפורמטיקה, תורת הקודים,

<https://peerj.com/articles/cs-171.pdf>

במערכות דינמיות סימבוליות ...

$$\text{"shift homeomorphism } \sigma: \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{Z}}, \sigma(x_i) = (x_{i+1})$$

(תבדקו שיש מסלול צפוף לפעולת חבורה ציקלית $\{\sigma^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ על $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ $G = \langle \sigma \rangle$)

ראו גם: https://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_set

הרצאה 12

מספר Lebesgue

הגדרה: נניח α, β כל אחד אוסף תתי קבוצות של קבוצה X . אומרים ש β עידון של α אם

$$\forall B \in \beta \exists A \in \alpha : B \subseteq A$$

נסמן: $\beta < \alpha$.

דוגמה טריוויאלית: אם $\beta \subseteq \alpha$ אז $\beta < \alpha$.

דוגמה: $\forall 0 < r_1 < r_2 \quad \{B_{r_1}(x) : x \in X\} < \{B_{r_2}(x) : x \in X\}$

הגדרה: נניח (X, d) מ"מ, α כיסוי של X . אומרים ש α הוא δ -אחיד

אם מתקיים $\{B_\delta(x) | x \in X\} < \alpha$

אומרים כיסוי אחיד (*uniform covering*) אם הוא δ -אחיד עבור $\delta > 0$ מסוים.

הגדרה: אומרים שהמספר $\delta > 0$ הוא מספר לבג (*Lebesgue*) של כיסוי α אם כל תת קבוצה

B ב X בעלת קוטר קטן מ δ מוכל באחד מהאיברים של α .

(ז"א $\text{diam } B < \delta \Rightarrow \{B\} < \alpha$.)

הערות:

(1) אם $0 < \delta < \delta_1$ מספר לבג של α , אז כל δ_1 כך ש $0 < \delta_1 < \delta$ גם מספר לבג.

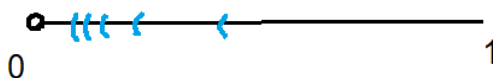
(2) עבור $\alpha = \{B_\delta(x) | x \in X\}$, מספר לבג = δ .

(3) **דוגמה:** כיסוי פתוח ללא מספר Lebesgue.

$$A_n := \left(\frac{1}{n+1}, 1\right] \quad X = (0,1] \notin \text{Comp}$$

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \quad \alpha := \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

כיסוי פתוח של $(0,1]$. אבל אין מספר לבג עבור α .



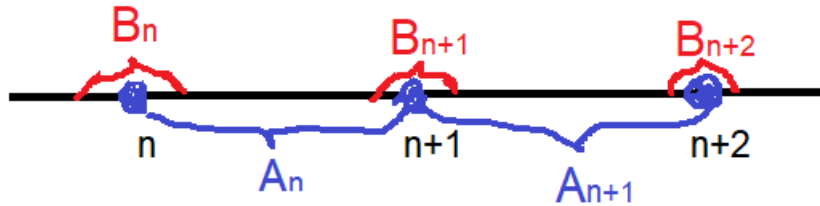
אם נניח בשלילה שכן אז קיים $\delta > 0$ מספר לבג ל α ,

נגדיר $A := B_{\frac{2\delta}{5}}(\frac{1}{5}\delta) = (0, \frac{3}{5}\delta)$

אז $diam(A) = \frac{3}{5}\delta < \delta$

אבל A לא מוכל באף איבר של α .

תרגיל: במרחב \mathbb{R} לכיסוי פתוח $\Omega = \{A_n = (n, n+1), B_n = (n - \frac{1}{|n|+1}, n + \frac{1}{|n|+1}) : n \in \mathbb{Z}\}$ אין מספר לבג.



משפט: (מספר Lebesgue) נניח (X, d) מרחב מטרי קומפקטי. אז לכל כיסוי פתוח α יש מספר לבג.

הוכחה: נניח בשלילה שקיים כיסוי פתוח α ללא מספר לבג.

אז לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת תת קבוצה A_n כך ש

$diam(A_n) < \frac{1}{n}$ אבל A_n לא מוכל באף איבר של α .

לכל $n \in \mathbb{N}$ נבחר נקודה אחת $a_n \in A_n$.

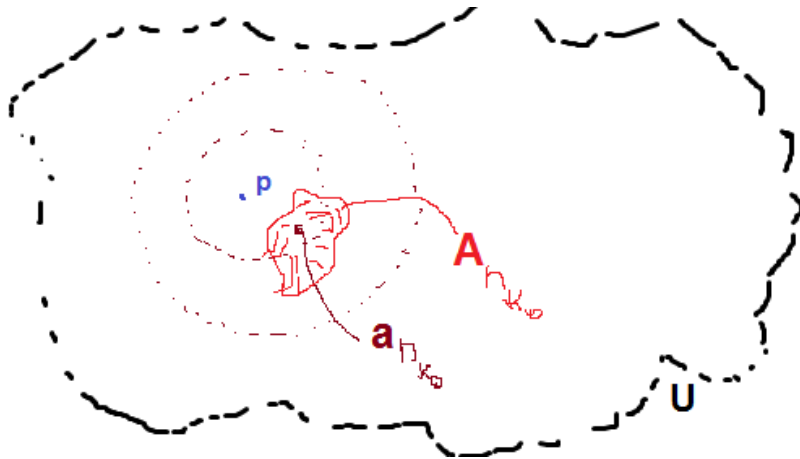
נתון ש X קומפקטי. הוא מטריזבילי לכן גם $X \in SComp$.

לכן קיימת תת סדרה מתכנסת $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ של הסדרה $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. תהי $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = p$.

קיים $U \in \alpha$ כך ש $p \in U$ (כי α כיסוי)

קיים $\varepsilon > 0$ כך ש $B_\varepsilon(p) \subseteq U$ (כי U פתוח)

קיים $k_0 \in \mathbb{N}$ כך ש $d(p, a_{n_{k_0}}) < \frac{\varepsilon}{2}$ $diam(A_{n_{k_0}}) < \frac{\varepsilon}{2}$ (התכנסות והבניה)



$$\forall x \in A_{n_{k_0}} \quad d(p, x) \leq d(p, a_{n_{k_0}}) + d(a_{n_{k_0}}, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

נקבל $A_{n_{k_0}} \subseteq B_{\epsilon}(p)$. אז גם $A_{n_{k_0}} \subseteq B_{\epsilon}(p) \subseteq U \in \alpha$, סתירה עם הבנייה של $A_{n_{k_0}}$!

☺

תוצאה: אם מרחב מטרי הוא קומפקטי אז כל כיסוי פתוח שלו אחיד.

הסבר: נניח α כיסוי פתוח. קיים מספר לבג $\delta > 0$. אז $\{B_{\frac{\delta}{3}}(x) : x \in X\} < \alpha$

משפט: נניח $(X, d), (Y, \rho)$ מרחבים מטריים $f : X \rightarrow Y$ פונקציה רציפה. אם X קומפקטי אז $f : X \rightarrow Y$ רציפה במידה שווה.

הוכחה: נניח $\epsilon > 0$. ש"ל שקיים $\delta > 0$ כך שמתקיים :

$$d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow \rho(f(x_1), f(x_2)) \leq 2\epsilon$$

נגדיר $\alpha := \{f^{-1}(B_{\epsilon}(y)) : y \in Y\}$. אז α כיסוי פתוח של X (רציפות).

קיים מספר לבג $\delta > 0$ עבור α (קומפקטיות של X ומשפט על מספר לבג).

נניח $d(x_1, x_2) < \delta$. אז $diam\{x_1, x_2\} < \delta$. לכן קיים $y \in Y$ כך ש

$$\{x_1, x_2\} \subseteq f^{-1}(B_{\epsilon}(y))$$

$$\{f(x_1), f(x_2)\} \subseteq ff^{-1}(B_{\epsilon}(y)) \subseteq B_{\epsilon}(y) \quad \text{אז}$$

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) \leq diam(B_{\epsilon}(y)) \leq 2\epsilon \quad \text{לכן}$$

☺

מידע: ראו על "מרחבין אחידים" [uniform spaces](#)

הגדרה: מ"ט X הוא קומפקטי מקומית אם לכל נקודה יש סביבה קומפקטית. שקול: לכל נקודה יש סביבה שהסגור שלה קומפקטי. נסמן: $X \in LComp$. דוגמאות: מרחב דיסקרטי, \mathbb{R}^n , כל תת קבוצה פתוחה במרחב קומפקטי T_2 ...

תרגיל: $\mathbb{Q} \notin LComp$.

הערה: "קומפקטיות מקומית" לא נשמרת ע"י מכפלה אינסופית (סופית – כן!). ראו תרגיל הבא

תרגיל: $\mathbb{R}^n \in LComp \exists$ אבל $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \notin LComp$.

הסבר: כל סביבה $V \in N(x)$ של כל נקודה $x = (x_1, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ מכילה תיבה בסיסית $U := U_1 \times U_2 \times \dots \times U_m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots$. לכן הטלה $\mathbb{R} = p_{m+1}(U) = p_{m+1}(V)$ עם תמונה רציפה (שהיא לא קומפקטית) ...

הגדרה: פונקציה $f: X \rightarrow Y$ נקראת קומפקטיפיקציה (compactification) של X אם f שיכון טופולוגי צפוף ומתקיים $Y \in Comp \cap T_2$.

דוגמאות:

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \quad f(n) = \frac{1}{n}$$

$$i: (-1,1) \rightarrow [-1,1] \quad \text{"(דו-נקודתית)"}$$

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow B_1[0] \quad f(v) = \frac{v}{1+|v|}$$

תרגיל* (יהיה בתירגול) -- קומפקטיפיקציה חד-נקודתית (Alexandroff)

נניח (X, τ) קומפקטי מקומית לא קומפקטי והאוסדורפי. תהי $p \notin X$ ("נקודת האינסוף"). בקבוצה $X^* = X \cup \{p\}$ נגדיר $\tau^* := \tau \cup \{X^* \setminus K : K \text{ is compact}\}$.

הוכיחו:

$$1. (X^*, \tau^*) \in Comp \cap T_2.$$

2. פונקציית ההכלה $i: X \rightarrow X^*$ מגדירה שיכון טופולוגי צפוף.

דוגמאות:

$$\bullet \quad X = \mathbb{R}^n \text{ אז } X^* \simeq S_n \text{ (הטלה סטראוגרפית)}$$

- $X^* \approx 8$ אז $X = (-\infty, 1) \cup (5, 7)$
- $X^* \approx \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ אז $X = \mathbb{N}$

תרגיל: לתאר קומפקטיפיקציה חד-נקודתית לכל מרחב דיסקרטי (אינסופי).

משפט: $LComp \cap T_2 \subset T_{3.5}$

הוכחה: נניח $X \in LComp \cap T_2$. אם X קומפקטי אז הוא T_4 כי הוכחנו ש $Comp \cap T_2 \subset T_4$. לכן גם $X \in T_{3.5}$. בה"כ $X \notin Comp$.

אז קיימת קומפקטיפיקציה $i: X \rightarrow X^* \in Comp \cap T_2$. ברור $X^* \in T_4$.

(כי $Comp \cap T_2 \subset T_4$). מצד שני $T_4 \subset T_{3.5}$ (כי $T_4 = T_4^{func}$ לפי משפט Urysohn). לכן גם $X \in T_{3.5}$. כעת נשתמש בעובדה ש $T_{3.5}$ תכונה תורשתית. לכן גם $X^* \in T_{3.5}$.

☺

תזכורת: $T_0, T_1, T_2, T_3, T_{3.5}$ תכונות תורשתיות.

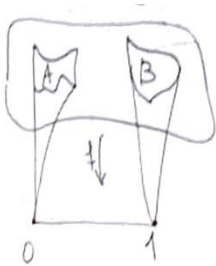
משפט: $Metriz \subset T_4$

הוכחה: $(X, \tau) \in Metriz \Rightarrow \exists d: \tau = top(d)$

מ"ל:

- א. $X \in T_1$
- ב. לכל A, B סגורות יש הפרדה פונקציונלית (הפרדה פונקציונלית גוררת הפרדה סביבתית)

(א) ברור $Metriz \subset T_2$.



(ב) נגדיר $f: X \rightarrow [0, 1]$ ע"י: $f(x) = \frac{f_A(x)}{f_A(x) + f_B(x)}$

כאשר $f_A(x) = d(x, A)$, $f_B(x) = d(x, B)$

- $0 \leq f(x) \leq 1$
- מוגדר היטב: המכנה $\neq 0$ לכל x כי $f_A(x) \geq 0, f_B(x) \geq 0$ – לכן המכנה = 0 אם ורק אם –

$$\begin{cases} f_A(x) = 0 \\ f_B(x) = 0 \end{cases}$$

↕

$$\begin{cases} d(x, A) = 0 \\ d(x, B) = 0 \end{cases}$$

↕

$$\begin{cases} x \in \bar{A} \stackrel{\text{נתון סגור}}{=} A \\ x \in \bar{B} \stackrel{\text{נתון סגור}}{=} B \end{cases}$$

לכן $x \in A \cap B$ מצד שני, $A \cap B = \emptyset$ (נתון). סתירה!
 • נשים לב כי –

$$\frac{f_1}{f_2} = f \in C(X, [0,1])$$

f רציפה. זה קורה כי $f_1, f_2 \in C(X)$ וכן $f_2 \neq 0$ תמיד.

$$\forall a \in A: f(a) = \frac{0}{0} = 0 \quad \bullet$$

$$\forall b \in B: \frac{d(b,A)}{d(b,A)+0} = f(b) = 1 \quad \bullet$$

מצאנו הפרדה פונקציונלית!

☺

מידע: קיימים $X \in T_{3\frac{1}{2}}/T_4$, למשל $X := \mathbb{N}^{\mathbb{R}}$.

Urysohn's Small Lemma (USL)

נניח $X \in T_4$ אז

(*) לכל סביבה פתוחה O של קבוצה סגורה A קיימת סביבה פתוחה U של A כך ש

$$A \subset U \subset \bar{U} \subset O$$

הסבר: $X \in T_4$ לכן עבור קבוצות סגורות זרות $A, B := X \setminus O$ קיימות סביבות פתוחות זרות

$$U \in N(A) \cap \tau, V \in N(B) \cap \tau$$

$$. A \subset U \subset \bar{U} \subset X \setminus V \subset X \setminus B = O \quad \text{אז נקבל}$$

הערה: בעצם (*) שקול לתנאי ב של אקסיומת T_4

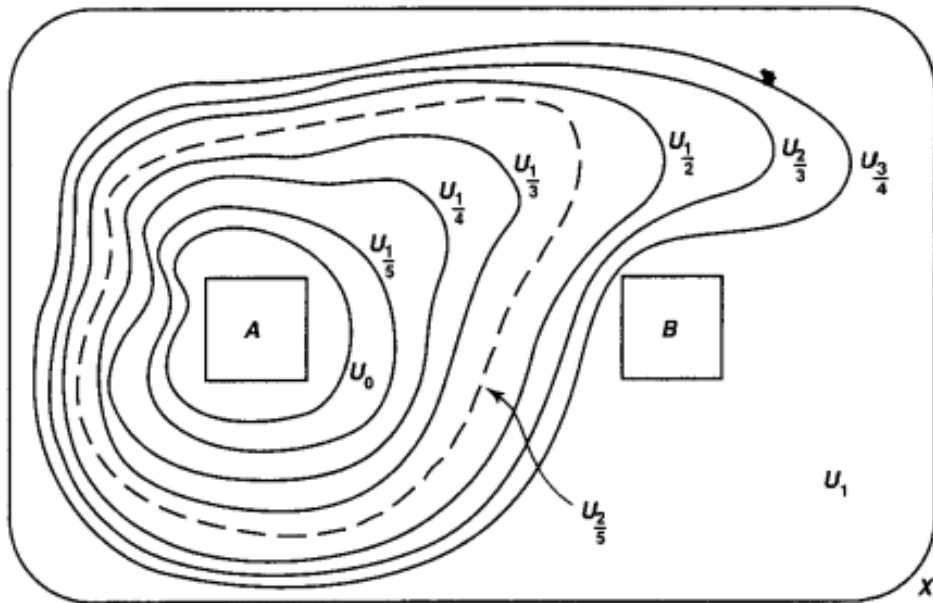
$$. T_4 = T_4^{func} \quad \text{:משפט (למה של Urysohn)}$$

נניח $X \in T_4$. אז לכל קבוצות סגורות זרות A, B יש הפרדה פונקציונלית במובן Urysohn

$$(f : X \rightarrow [0,1] \quad f(A) = 0, f(B) = 1)$$

הוכחה: רעיון להוכחה – "Onion Argument"

בהנחה שיש פונקציה כזאת אז יש אוסף $\{U_t : t \in [0,1]\}$ סביבות פתוחות של A כך ש
 $0 < s < t < 1 \Rightarrow \overline{U_s} \subseteq U_t$ (ניקח למשל: $U_t := f^{-1}[0,t)$ שימו לב: $(\overline{[0,s)} \subseteq [0,t)$)



בהוכחה הבאה עוברים תהליך הפוך – מבניית מאוסף דומה לבניית פונקציה.

תחילת התהליך: נגדיר $U_1 = X$. בגלל (USL) עבור $A \subset B^c$ קיימת קבוצה פתוחה $U_{1/2}$

$$A \subset U_{1/2} \subset \overline{U_{1/2}} \subset X \setminus B \quad \text{כך ש}$$

שוב בגלל (USL) קיימות קבוצות פתוחות $U_{1/4}, U_{3/4}$ כך ש

$$A \subset U_{1/4} \subset \overline{U_{1/4}} \subset U_{1/2} \subset \overline{U_{1/2}} \subset U_{3/4} \subset \overline{U_{3/4}} \subset X \setminus B$$

בשלב הבא נמצא סביבות פתוחות עם אינדקסים $\frac{1}{8}, \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{8}{8} = 1$

כאשר סביבות עם האינדקסים $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \frac{8}{8} = 1$ כבר הגדרנו!

נמשיך כך באינדוקציה. אז נקבל אוסף קבוצות פתוחות

$$0 < s < t < 1 \Rightarrow \overline{U_s} \subseteq U_t \quad \{U_t : t \in D\}$$

שימו לב קבוצת רציונליים דיאדיים $D := \{\frac{m}{2^n}, m, n \in \mathbb{N}, m \leq 2^n\}$ **צפופה** ב $[0,1]$.

$$f(x) := \inf\{t \in D : x \in U_t\} \quad \text{נגדיר פונקציה}$$

$$0 \leq f(x) \leq 1 \quad f(a) = 0 \quad \forall a \in A \quad f(b) = 1 \quad \forall b \in B \quad \bullet$$

$$\bullet \quad \forall t \in D \quad A \subseteq U_t \subseteq X \setminus B \subseteq X = U_1 \quad 0 \in \overline{D} = [0,1]$$

$$\bullet \quad f : X \rightarrow [0,1] \quad \text{רציפה} \quad (\text{נדלג על הבדיקה})$$

לפי תכונת פרא-בסיס (ב) $[0,1]$ מ"ל $f^{-1}(a,1)$, $f^{-1}[0,a)$ פתוחות ב X .
 א. לפי ההגדרה $f^{-1}[0,a) = \{x \in X : f(x) < a\}$.
 קבוצה D צפופה ב $[0,1]$. לכן נקבל ש $f^{-1}[0,a) = \bigcup_{t < a} U_t$ והיא פתוחה לפי (t_3) .

ב. ש"ל $X \setminus f^{-1}(a,1)$ סגור.

קודם נעיר $X \setminus f^{-1}(a,1) = \{x \in X : f(x) \leq a\}$

עכשיו מ"ל $\{x \in X : f(x) \leq a\} = \bigcap_{a < t} \overline{U}_t$ (ואז חיתוך קבוצות סגורות שימוש ב (t_3^c))
 (\subseteq)

נניח $y \in \{x \in X : f(x) \leq a\}$. נבחר דיאדי $s \in D$ כך ש $a < s < 1$ (צפיפות D !)
 אז לכל $a < t < s$ נקבל $\overline{U}_t \subseteq U_s$.

מצד שני בגלל $f(y) \leq a < t$ מתקיים $y \in U_t \subseteq \overline{U}_t$. לכן $y \in \bigcap_{a < t} \overline{U}_t$.
 (\supseteq)

נניח $y \in \bigcap_{a < t} \overline{U}_t$. נבחר ε כך ש $0 < \varepsilon < 1 - a$.

בגלל הצפיפות של D נבחר:

$$a < t < a + \varepsilon < 1 \text{ ש } t \in D$$

וגם $s \in D$ כך ש $t < s < a + \varepsilon$.

ברור שאז $\overline{U}_t \subseteq U_s$. לכן $y \in U_s$. מכאן $f(y) \leq s < a + \varepsilon$.

קיבלנו $\forall 0 < \varepsilon < 1 - a \quad f(y) < a + \varepsilon$.

ז"א $f(y) \leq a$.

☺

הערה: (Tietze-Urysohn extension thm)

נניח $X \in T_1$. אז התנאים הבאים שקולים:

1. $X \in T_4$.

2. לכל תת קבוצה סגורה $A \subset X$ ולכל פונקציה רציפה $f : A \rightarrow [0,1]$ קיימת הרחבה רציפה

$$F : X \rightarrow [0,1]$$

נוכיח רק $(1) \rightarrow (2)$:

נניח C, B קבוצות סגורות זרות לא ריקות. נגדיר קבוצה $A := C \cup B$. אז היא סגורה. ונגדיר

$$f : A \rightarrow [0,1] \quad f(A) = 0, f(B) = 1$$

פונקציה רציפה. אז היא רציפה

(שימו לב: $A := C \cup B$ פירווק טופולוגי).

לפי (2) קיימת הרחבה רציפה $F: X \rightarrow [0,1]$.

אז לפי הבנייה היא מפרידה פונקציונלית C, B .

תרגיל: (Square-filling curves)

בעזרת משפט ההרחבה הוכיחו שקיימת פונקציה רציפה על $F: [0,1] \rightarrow [0,1]^2$.

הסבר:

קיים הומואומורפיזם $h: C \rightarrow C^2$ וקיימת פונקציה רציפה ועל $\varphi: C \rightarrow [0,1]$

מידע: כל מרחב קומפקטי מטריזבילי הוא תמונה רציפה של קבוצת קנטור.

למשל: $(x_i \in \{0,2\}) \quad f\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2} \cdot \frac{1}{2^i}$ (מדוע היא לא חח"ע?)

אז יש גם פונקציה רציפה ועל $f = (\varphi \times \varphi) \circ h: C \rightarrow [0,1] \times [0,1]$

כעת נשתמש במשפט ההרחבה ונקבל פונקציה רציפה ועל $F: [0,1] \rightarrow [0,1]^2$.



הגדרה: נניח $S = \{f_i: X \rightarrow Y_i\}_{i \in I}$ אוסף של פונקציות. אומרים ש S :

א. מפריד נקודות אם לכל $x_1 \neq x_2$ ב X קיים $f_{i_0}: X \rightarrow Y_{i_0}$ ב S כך ש $f_{i_0}(x_1) \neq f_{i_0}(x_2)$

ב. מפריד נקודות וקבוצות סגורות אם לכל $x \in X$ וקבוצה סגורה K ב X כך ש $x \notin K$

קיים $f_{i_0}: X \rightarrow Y_{i_0}$ ב S כך ש $f_{i_0}(x) \notin \overline{f_{i_0}(K)}$

משפט (שני על פונקציות האלכסון):

1. נניח $S = \{f_i: X \rightarrow Y_i\}_{i \in I}$ אוסף של פונקציות רציפות ונתבונן בפונקציות האלכסון

$$f = \Delta_{i \in I} f_i: X \rightarrow Y = \left(\prod_{i \in I} Y_i, \tau_{\Pi}\right) \quad f(x) = (f_i(x))_{i \in I}$$

א. אם S מפריד נקודות אז רציפה חח"ע.

ב. אם S מפריד נקודות וקבוצות סגורות, אז $X \in T_1$ שיוון טופולוגי.

הוכחה: א. לפי משפט ראשון על האלכסון רציפה ומתקיים $\forall i \in I \quad f_i = p_i \circ f$

לכן אם $f_{i_0}(x_1) \neq f_{i_0}(x_2)$ אז $f(x_1) = (f_i(x_1))_{i \in I} \neq (f_i(x_2))_{i \in I} = f(x_2)$

ב. $X \in T_1$ לכן לפי שלב (א) האוסף S מפריד נקודות ופונקציה אלכסון היא חח"ע.

מ"ל שפונקציה (חח"ע+על+רציפה) "מצומצמת בטווח" $f : X \rightarrow f(X)$ סגורה.

מ"ל $f(K) = f(X) \cap \overline{f(K)}$ לכל K סגור ב X .

מ"ל $f(K) \supseteq f(X) \cap \overline{f(K)}$ (הכלה \subseteq ברורה).

נניח $y \in f(X) \cap \overline{f(K)}$. צ"ל $y \in f(K)$.

נקבל $\exists x \in X \quad y = f(x) \in \overline{f(K)}$.

אז בגלל השוויונים $\forall i \in I \quad f_i = p_i \circ f$ רציפות ההטלות נקבל

$$\forall i \in I \quad f_i(x) = p_i(f(x)) \in p_i \overline{f(K)} \subset \overline{p_i f(K)} = \overline{f_i(K)}$$

זאת אומרת S לא מפריד נקודה x וקבוצה סגורה K . אז בהכרח $x \in K$.

זה מוכיח $y = f(x) \in f(K)$.

☺

משפט: נניח X מ"ט. התנאים הבאים שקולים:

1. X קומפקטי והאוסדורפי (ז"א $X \in \text{Comp} \cap T_2$).

2. X הומיאומורפי לתת קבוצה סגורה של קובית $[0,1]^S$ Tychonoff.

הוכחה: $1 \Leftrightarrow 2$ $[0,1]^S \in \text{Comp}$ (משפט Tychonoff). תת קבוצה סגורה גם קומפקטית.

T_2 תכונה כפליית ותורשתית. לכן $X \in \text{Comp} \cap T_2$.

$2 \Leftrightarrow 1$ נניח $X \in \text{Comp} \cap T_2$. מ"ל שקיים שיכון טופולוגי $f : X \rightarrow [0,1]^S$ עבור S מסוים.

הוכחנו ש $\text{Comp} \cap T_2 \subset T_4$. נשתמש במשפט *Urysohn* $T_4 = T_4^{\text{func}}$.

לכל זוג של נקודות שונות $a, b \in X$ נבחר בפונקציה רציפה

$$f_{a,b} : X \rightarrow [0,1], f(a) = 0, f(b) = 1$$

אוסף של כל הפונקציות שנבחרו $S := \{f_s = f_{a,b} \mid a \neq b\}$ (ז"א $s = (a, b), a \neq b$)

משרה פונקציה האלכסון $f : X \rightarrow [0,1]^S \quad f(x) = (f_s(x))_{s \in S}$

הפונקציה היא רציפה (הוכחנו ...) "מפרידה נקודות" ז"א היא חח"ע.

לפי **משפט השיכון** נקבל שהפונקציה היא מגדירה שיכון טופולוגי (על קבוצה סגורה).

☺

הרצאה 13

תרגיל*: (האוניברסליות של קבוצת Cantor) התנאים הבאים שקולים:
 א. מ"ט X הומיאומורפי לתת קבוצה סגורה של קבוצת קנטור C .
 ב. X קומפקטי, מטריזבילי ו $\dim X = 0$.

משפט (האוניברסליות של קוביות Tychonoff)

התנאים הבאים שקולים:

$$1. X \in T_{3.5}$$

2. X משוכן לתוך קובית Tychonoff מסוימת $[0,1]^S$.

3. ל X יש קומפקטיפיקציה.

הוכחה:

$1 \Leftarrow 2$ $X \in T_{3.5}$ לכן קיים אוסף פונקציות $\{f_s : X \rightarrow [0,1]\}_{s \in S}$ שמפריד נקודות וקבוצות סגורות (למשל $S := C(X, [0,1])$). אז פונקצית האלכסון $f = \Delta_{s \in S} f_s : X \rightarrow [0,1]^S$ שיכון טופולוגי לפי המשפט על פונקצית האלכסון.

$2 \Leftarrow 3$ אם $f : X \rightarrow [0,1]^S$ שיכון טופולוגי אז הוא משרה קומפקטיפיקציה

$$f : X \rightarrow Y := \overline{f(X)} \subseteq [0,1]^S$$

לפי משפט Tychonoff $[0,1]^S \in Comp$ האוסדופיות תכונה כפלית. לכן $Y \in Comp \cap T_2$ אז גם $[0,1]^S \in Comp \cap T_2$.

$3 \Leftarrow 1$ נזכיר ש $T_{3.5} \subset T_4 \subset T_2 \cap Comp$ ו $Y \in Comp \cap T_2$ תכונה תורשתית.



משפט (מטריזציה)

התנאים הבאים שקולים:

$$1. X \in Metr_{iz} \cap B_2 \quad (\text{שקול: } X \in Metr_{iz} \cap Sep)$$

2. X משוכן לתוך קובית Hilbert $[0,1]^{\mathbb{N}}$.

הוכחה: (נדלג על ההוכחה)

$1 \Leftarrow 2$ בגלל המשפט הקודם מ"ל שקיים אוסף בן מניה $\{f_s : X \rightarrow [0,1]\}_{s \in S}$ שמפריד נקודות וקבוצות סגורות.

נתון $X \in \text{Metriz} \cap B_2$. קיים בסיס בן מניה $\gamma = \{O_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

לכל זוג O_n, O_m עם התנאי $\overline{O_m} \subseteq O_n$ נבחר פונקציה רציפה אחת $f_{m,n} : X \rightarrow [0,1]$ כך ש

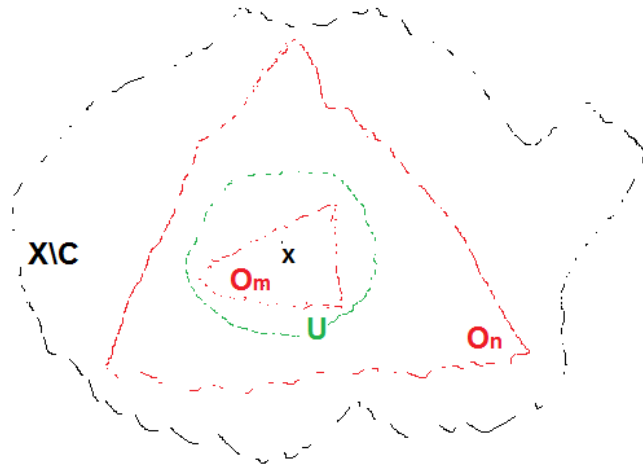
$$(\text{Metriz} \subseteq T_4 = T_4^{\text{func}} \text{ (זה אפשרי כי } f_{m,n}(\overline{O_m}) = 0, f_{m,n}(X \setminus O_n) = 1$$

אז אוסף S של פונקציות שנבחרו הוא בן מניה.

בגלל המשפט "פונקצית האלכסון" מ"ל ש S מפריד נקודות וקבוצות סגורות.

נניח C סגורה ו $x \notin C$. $\gamma = \{O_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ בסיס לטופולוגיה לכן אפשר לבחור

סביבה פתוחה $O_n \in \gamma$ כך ש $x \in O_n \subseteq X \setminus C$.



במרחב מטריזבילי X קיימת סביבה $U \in N(x)$ כך ש $\overline{U} \subseteq O_n$

(למשל כדור $x \in U = B(x, \varepsilon) \subset \overline{B(x, \varepsilon)} \subset B[x, \varepsilon] \subset O_n$).

$\gamma = \{O_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ בסיס לכן קיים $O_m \in \gamma$ כך ש $x \in O_m \subseteq U$. נקבל

$$x \in O_m \subseteq \overline{O_m} \subseteq \overline{U} \subseteq O_n \subseteq X \setminus C$$

אז פונקצית אוריסון $f_{m,n} : X \rightarrow [0,1]$ מפרידה x, C (כי היא מפרידה $\overline{O_m}, X \setminus O_n$)

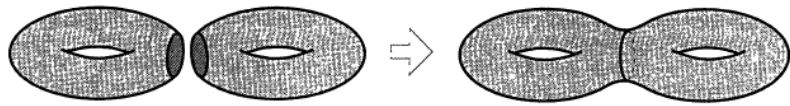
$1 \Leftarrow 2$ $[0,1]^{\mathbb{N}} \in \text{Metriz} \cap B_2$ וכך גם כל תת מרחב שלו (כי Metriz, B_2 תכונות תורשתיות).

☺

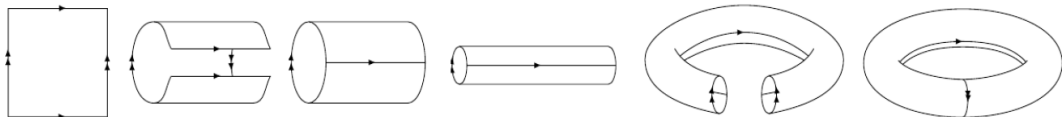
מידע: אפשר להוכיח משפט Urysohn $T_3 \cap B_2 \subset \text{Metriz}$ (ראו למשל: J.R. Munkres Topology).

לכן במשפט הקודם התנאי הראשון ניתן להחליש ל $X \in T_3 \cap B_2$.

טופולוגית מנה -- Quotient topology



למדנו מספר אפשרויות לבנות מרחבים טופולוגיים חדשים בעזרת נתונים. בין היתר: תת מרחב, מכפלה, סכום. אפשרות נוספת וגם מאוד חשובה היא "מנה טופולוגית". למשל אפשר לקבל טורוס 2-ממדי כמרחב מנה של ריבוע באופן הבא:



This image from <http://i.stack.imgur.com/FJaFe.png>.

נניח (X, τ) מ"ט ואנחנו רוצים "להדביק חלקים מסוימים".

איך מגדירים טופולוגיה מתאימה? מה הן ההגדרות המתאימות?

תזכורת (מתורת הקבוצות) נניח \sim יחס שקילות בקבוצה X . נסמן:

- $[a] := \{x \in X \mid a \sim x\}$ מחלקה של איבר a
- (תמיד $X = \coprod_{a \in X} [a]$ ויש חלוקה $[a]$)
- $X / \sim := \{[a] : a \in X\}$ "קבוצת המנה" היא קבוצת המחלקות
- $\rho : X \rightarrow X / \sim \quad a \mapsto [a]$ "פונקציה (העתקת) טבעית" (תמיד על)

שאלה: איך להגדיר "טופולוגיה טבעית" ב X / \sim כאשר X מרחב טופולוגי?

שקול: נתונה פונקציה על $q : X \rightarrow Y$. איך להגדיר "טופולוגיה טבעית" ב Y ?

שימו לב: אם נגדיר $q(a) = q(b) \Leftrightarrow a \sim b$ אז נקבל יחס שקילות כך ש

Y וקבוצת מנה X / \sim הם באותו תפקיד.

רעיון: להגדיר טופולוגיה σ ב Y כטופולוגיה הכי חזקה שמבטיחה רציפות $q : X \rightarrow Y$.

הגדרה: נניח (X, τ) מ"ט ונתונה פונקציה על $q : X \rightarrow Y$. אומרים ש σ **טופולוגית**

המנה (ביחס לפונקציה $q : (X, \tau) \rightarrow Y$) אם מתקיימים שני תנאים הבאים:

א. $q: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ רציפה.

ב. אם $q: (X, \tau) \rightarrow (Y, \gamma)$ רציפה אז $\gamma \subseteq \sigma$.

במצב כזה גם אומרים ש $q: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ היא **פונקצית מנה** (או העתקת מנה).

לעיתים σ נקראת גם "טופולוגיה חזקה" (strong topology).

תאור של טופולוגית המנה: $\sigma := \{O \subseteq Y \mid q^{-1}(O) \in \tau\}$

ז"א קבוצה ב Y פתוחה אם (ורק אם) המקור פתוח ב X .

שקול: קבוצה ב Y סגורה אם (ורק אם) המקור סגור ב X (מדוע?)

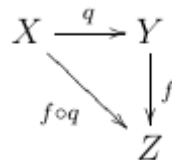
תרגיל: כל הומיאומורפיזם פונקצית מנה.

תרגיל: הרכבה של פונקציות מנה היא גם מנה.

משפט (טופולוגיה חזקה)

נניח $q: X \rightarrow Y$ פונקצית מנה ונתונה פונקציה $f: Y \rightarrow Z$.

אז פונקציה f רציפה אם (ורק אם) רציפה ההרכבה $f \circ q: X \rightarrow Z$.



הוכחה: נניח $f \circ q: X \rightarrow Z$ רציפה. צ"ל רציפה $f: Y \rightarrow Z$.

ש"ל $f^{-1}(O)$ פתוחה ב Y לכל O פתוחה ב Z .

נתון ש $q: X \rightarrow Y$ מנה. לכן ש"ל $q^{-1}(f^{-1}(O))$ פתוחה ב X . אבל

$$q^{-1}(f^{-1}(O)) = (f \circ q)^{-1}(O)$$

☺

תוצאה: נניח $q: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ פונקצית מנה. אז טופולוגית מנה σ ב Y היא

טופולוגיה הכי חזקה שמבטיחה רציפות $q: X \rightarrow Y$.

ז"א אם $q: (X, \tau) \rightarrow (Y, \gamma)$ רציפה אז $\gamma \subseteq \sigma$.

הסבר: נשתמש במשפט "טופולוגיה חזקה" כאשר בתפקיד $f : Y \rightarrow Z$ ניקח $\text{id} : (Y, \sigma) \rightarrow (Y, \gamma)$.

משפט: (תנאי מספיק: פתיחות, סגירות)

אם פונקציה $q : X \rightarrow Y$ על, רציפה, פתוחה (או וסגורה)

אז $q : X \rightarrow Y$ היא פונקצית מנה.

הוכחה: נניח $q^{-1}(O)$ פתוחה ב X עבור $O \subseteq Y$. צ"ל O פתוחה ב Y .

לפי הנתון הפונקציה היא פתוחה לכן התמונה $q(q^{-1}(O))$ היא גם פתוחה.

אבל q על לכן $q(q^{-1}(O)) = O$ חייבת להיות פתוחה. הוכחה דומה אם יש סגירות ...

☺

תוצאה: כל הטלה $p_{i_0} : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_{i_0}$ היא פונקצית מנה (פתיחות).

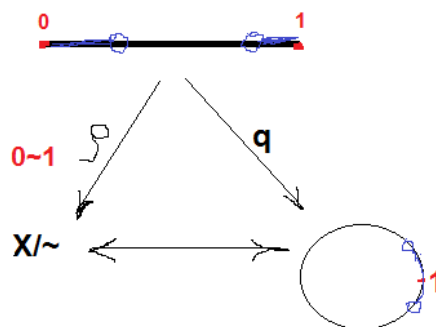
תוצאה: נניח $f : X \rightarrow Y$ רציפה, על $Y \in T_2, X \in \text{Comp}$. אז f פונקצית מנה (סגירות).

דוגמה: $f : X = [0,1] \rightarrow Y = T = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\|=1\}$ $f(x) = \text{cis}(2\pi x)$

היא פונקצית מנה (הפונקציה היא על רציפה וסגורה).

הערה: אפשר לתת גם הסבר גיאומטרי: הדבקת נקודות קצה של קטע מגדיר מעגל.

$$X \rightarrow X/\sim \cong Y, \quad 0 \sim 1$$



דוגמה: $\text{id} : (\mathbb{R}, \tau_{discr}) \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה על אבל לא פונקצית מנה.

הסבר: המקור $\text{id}^{-1}(\{5\}) = \{5\}$ פתוח ב $(\mathbb{R}, \tau_{discr})$ אבל לא ב \mathbb{R} .

דוגמה: פונקציה רציפה $\text{id}: (X, \tau_1) \rightarrow (X, \tau_2)$ פונקצית מנה אם ורק אם $\tau_1 = \tau_2$.

דוגמה: $h: X = [0, 1) \rightarrow Y = T = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$ $h(x) = \text{cis}(2\pi x)$

הפונקציה היא על ורציפה אבל היא לא פונקצית מנה.

הסבר: עבור $A := \{z \in T \mid 0 \leq \arg(z) < \frac{\pi}{2}\}$ המקור $h^{-1}(A) = [0, \frac{1}{4})$ פתוח ב $[0, 1)$

אבל A לא פתוח ב T .

דוגמה: ב \mathbb{R} נגדיר יחס שקילות $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Q}$. אז מרחב מנה $\mathbb{R}/\sim = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ (מה העוצמה של \mathbb{R}/\sim ?)

הסבר: מחלקות שקילות הן מהצורה $[a] = a + \mathbb{Q}$. צפוף ולא סגור ב \mathbb{R} .

לכל מקור $q^{-1}(C)$ של תת קבוצה לא ריקה C ב \mathbb{R}/\sim לגבי פונקציה טבעית

$$q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\sim$$

הקבוצה $q^{-1}(C)$ היא צפופה ב \mathbb{R} (כי $q^{-1}(C)$ מכיל לפחות מחלקה אחת).

לכן האפשרות היחידה ש $q^{-1}(C)$ סגור היא $q^{-1}(C) = \mathbb{R}$. אבל אז

$C = qq^{-1}(C) = q(\mathbb{R}) = \mathbb{R}/\sim$ (קחו בחשבון ש $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\sim$ על). לכן ב $\mathbb{R}/\sim = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ עם טופולוגית מנה σ יש רק קבוצה אחת סגורה לא ריקה (שהיא \mathbb{R}/\mathbb{Q}).

שקול: σ טופולוגיה טריוויאלית.

משפט: (הומיאומורפיזם ומנה)

נניח $f: X \rightarrow Y$ פונקציה רציפה, על + חח"ע. אז f מנה אם ורק אם f הומיאומורפיזם.

הוכחה: כיוון אחד ברור (כי כל הומיאומורפיזם פונקצית מנה).

בכיוון השני נניח $f: X \rightarrow Y$ מנה וחח"ע. צ"ל f הומיאומורפיזם. מ"ל f פתוח.

לכל קבוצה פתוחה $U \subseteq X$ מתקיים תמיד $U \subseteq f^{-1}(f(U))$. אצלנו בעצם

$$U = f^{-1}(f(U)) \text{ (בגלל } f \text{ חח"ע).}$$

לפי הגדרת טופולוגית מנה קבוצה $O := f(U)$ היא חייבת להיות פתוחה ב Y .

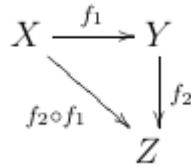
הוכחנו ש f פתוח.



משפט (תנאי מספיק "צמצום")

נניח $f_1 : X \rightarrow Y$ $f_2 : Y \rightarrow Z$ פונקציות רציפות.

אם ההרכבה $f = f_2 \circ f_1 : X \rightarrow Z$ היא פונקצית מנה אז גם $f_2 : Y \rightarrow Z$ פונקצית מנה.



הוכחה: צ"ל $f_2 : Y \rightarrow Z$ מנה. נניח $f_2^{-1}(A)$ פתוח ב Y . לפי הרציפות של

$f_1 : X \rightarrow Y$ נקבל ש $f_1^{-1}(f_2^{-1}(A))$ פתוח ב X . ברור

$f = f_2 \circ f_1 : X \rightarrow Z$ אבל נתון ש $f_1^{-1}(f_2^{-1}(A)) = (f_2 \circ f_1)^{-1}(A)$

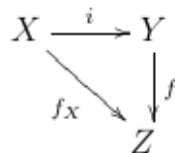
פונקצית מנה. לכן A פתוחה.

☺

תוצאה: נניח $f : Y \rightarrow Z$ רציפה על וקיימת תת קבוצה $X \subseteq Y$ כך שצמצום

$f_X : X \rightarrow Z$ הוא על ופונקצית מנה. אז גם $f : Y \rightarrow Z$ מנה.

הסבר: נפעיל משפט תנאי מספיק "צמצום" באופן הבא כאשר $i : X \rightarrow Y$ שיקון טבעי



☺

הגדרה: נניח $f : X \rightarrow Y$ ונתון יחס שקילות \sim ב X (או נתונה חלוקה של X).

אומרים שפונקציה $f : X \rightarrow Y$

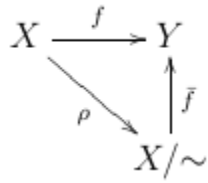
א. **מכבדת את היחס \sim** אם $a \sim b \Rightarrow f(a) = f(b)$

ב. **מגדירה את היחס \sim** אם $a \sim b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$

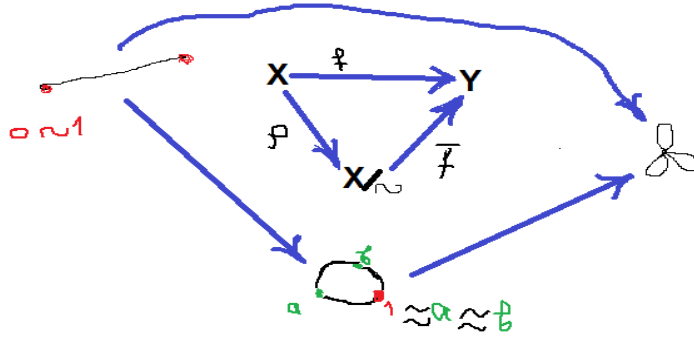
תכונות:

1. $f : X \rightarrow Y$ **מכבדת את היחס \sim** אם ורק אם מוגדרת היטב פונקצית על הבאה

$$(f = \bar{f} \circ \rho \text{ א"ז}) \quad \bar{f}: X/\sim \rightarrow Y \quad \bar{f}([x]) = \bar{f}(\rho(x)) = f(x)$$



הערה: פירוש אינטואיטיבי -- יתכן ו $f: X \rightarrow Y$ מדביקה יותר נקודות מיחס שקילות \sim

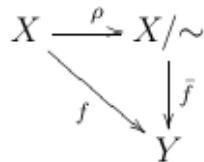


למשל

מוסכמה: בהמשך על X/\sim ניקח טופולוגיה מנה (אם לא נאמר אחרת).

2. $f: X \rightarrow Y$ רציפה אם ורק אם $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y$ רציפה.

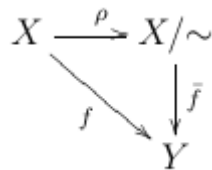
הסבר: נפעיל משפט "טופולוגיה חזקה" עבור הדיאגרמה הבאה



אם $f: X \rightarrow Y$ רציפה אז גם $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y$.

3. $f: X \rightarrow Y$ מנה אם ורק אם $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y$ מנה

הסבר: נפעיל משפט "צמצום" עבור הדיאגרמה הבאה



אם $f: X \rightarrow Y$ מנה אז גם $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y$.

4. $f : X \rightarrow Y$ מגדירה את היחס \sim אם ורק אם מוגדרת היטב פונקצית על $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$ והיא חח"ע.

משפט (קריטריון למנה)

נניח $f : X \rightarrow Y$ פונקציה רציפה על. נסמן ב X/\sim_f מרחב מנה כאשר \sim_f הוא היחס שמוגדר ע"י $f : X \rightarrow Y$ (ז"א $a \sim_f b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$).

התנאים הבאים שקולים:

א. $f : X \rightarrow Y$ מנה.

ב. פונקציה מושרית $\bar{f} : X/\sim_f \rightarrow Y$ היא הומיאומורפיזם

הוכחה:

ב \Leftarrow א

$f = \bar{f} \circ \rho$ הרכבה של שתי פונקציות מנה. כי $\rho : X \rightarrow X/\sim_f$ פונקצית מנה

(בחרנו X/\sim_f בטופולוגית מנה) ו \bar{f} הומיאומורפיזם.

א \Leftarrow ב

נתון $f : X \rightarrow Y$ מנה. לפי תכונה 3 נקבל $\bar{f} : X/\sim_f \rightarrow Y$ גם מנה.

אבל $\bar{f} : X/\sim_f \rightarrow Y$ (על ו) חח"ע לפי תכונה 4.

לכן לפי משפט "הומיאומורפיזם ומנה" נקבל ש $\bar{f} : X/\sim_f \rightarrow Y$ הומיאומורפיזם.



הערה חשובה: תכונות הנ"ל עוזרות להוכיח הומיאומורפיזם עם מרחבי מנה מסוימים.

דוגמה: הדבקת נקודות קצה של קטע מגדיר מעגל.

הסבר: נגדיר פונקציה

$$f : X = [0,1] \rightarrow Y = T = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\|=1\} \quad f(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$$

הפונקציה היא מנה (כפונקציה רציפה סגורה על מרחב האוסדורף).

$$f : X \rightarrow T \text{ מגדירה את היחס } 0 \sim 1.$$

$$\bar{f} : [0,1]/\sim_f \rightarrow T \text{ לפי משפט קריטריון קיים הומיאומורפיזם}$$

לכן $[0,1]/\sim_f \cong T$.

תרגיל: הוכיחו:

א. $f: \mathbb{R} \rightarrow T, f(x) = \text{cis}(2\pi x)$ פונקציה מנה.

ב. $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong T$

(כאשר $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{x + \mathbb{Z} \mid x \in \mathbb{R}\}$ מסמן קבוצת מנה של מחלקות עם טופולוגיה מנה)

הסבר של א

(דרך 1) אפשר להשתמש בתוצאת משפט צמצום עבור ההכלה $i: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$.

(דרך 2) אפשר להוכיח שבעצם $f: \mathbb{R} \rightarrow T, f(x) = \text{cis}(2\pi x)$ פתוחה.

הסבר של ב

כאן אפשר להשתמש בחלק א יחד עם משפט קריטריון למנ אם ניקח בחשבון שיחס שקילות

$a \sim_f b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{\mathbb{Z}}$ הוא

הערה: מחלקת שקילות של $a \in \mathbb{R}$ הוא $[a] = a + \mathbb{Z}$.

ז"א תאור אחר של היחס הוא $a \sim_f a + n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

תרגיל: (הצגת טורוס דו-ממדי) הוכיחו $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong T^2$

(מנה) $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \{(x, y) + \mathbb{Z}^2 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ מסמן קבוצת מנה של מחלקות עם טופולוגיה מנה

פתרון: נתחיל מהפונקציה $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2, f(x, y) = (\text{cis}2\pi x, \text{cis}2\pi y)$.

צמצום הפונקציה $f: [0,1]^2 \rightarrow T^2$ פונקציה מנה. לכן לפי משפט (תנאי מספיק "צמצום") גם $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ מנה.

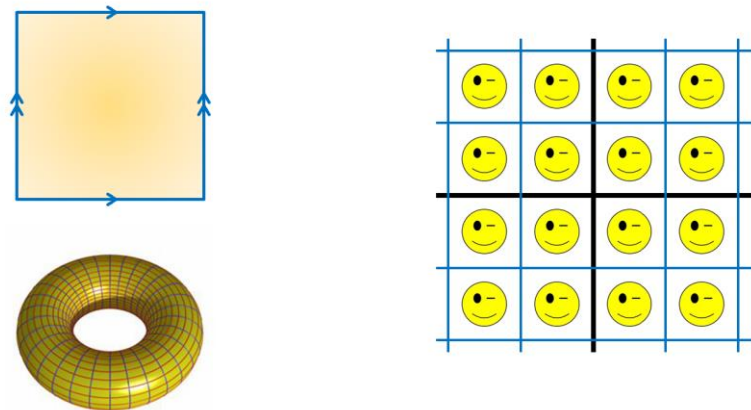
כעת לפי משפט (קריטריון למנה) נקבל $\mathbb{R}^2/\sim_f \cong T^2$.

כאן יחס שקילות מתאימה היא $(a, b) \sim_f (a + n, b + m) \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}$ המחלקות

הן $\{(x, y) + \mathbb{Z}^2 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. לכן קבוצת מנה מתאימה היא בדיוק $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

לכן מרחב מנה \mathbb{R}^2/\sim_f כאן הוא בעצם $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong T^2$.

כבר הוכחנו הומומורפיזם $\mathbb{R}^2 / \sim_f \cong T^2$. לכן גם $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 \cong T^2$.



מידע: מי שלמד תורת החבורות בהחלט מבין שקבוצת מנה $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ היא חבורת מנה. בשפה יותר מתמטית כאן מדובר על איזומורפיזם של חבורות טופולוגיות $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 \cong T^2$

תרגיל: במעגל יחידה $T = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$ במישור המרוכב נגדיריחס שקילות $v \sim -v$. הוכיחו שמרחב מנה T / \sim הוא הומומורפי למעגל עצמו T .

פתרון: $f : T \rightarrow T, f(v) = v^2$ היא פונקצית מנה (מדוע?).

היא מגדירה יחס שקילות בדיוק $v \sim -v$.

מידע: כאן בעצם אנחנו מחשבים "מרחב המסלולים" (אורביטות) לגבי פעולה טבעית

חבורה ציקלית $\mathbb{Z}_2 = \{e, \sigma\}$ עם שני איברים על המעגל T (הפעולה היא היפוך הסימן)

$$\mathbb{Z}_2 \times T \rightarrow T \quad (\sigma, v) \mapsto \sigma(v) = -v$$

אזהרות:

1. להיות פונקצית מנה לא תורשתית. ז"א יתכן ש $f : X \rightarrow Y$ העתקת מנה $A \subseteq X$ ופונקצית על שמושרית $f_A : A \rightarrow f(A)$ היא לא תמיד מנה.

למשל להתבונן בדוגמאות שהיו עם $A = [0,1) \subset X = [0,1]$

דוגמה נוספת: $p_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ מנה אבל הצמצום

$p_1 : X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\} \cup \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ לא מנה

כי המקור של $\{0\}$ הוא נקודון $\{(0,0)\}$ שהיא נקודה מבודדת ב X

אבל $\{0\}$ לא פתוח ב \mathbb{R} .

2. מרחב מנה יכול להיות מאוד מסובך ("הרבה יותר מהמקור"). למשל:

א. ריבוע דו-ממדי הוא מרחב מנה של קטע (Square-filling curves).

ב. כל מרחב מטרי קומפקטי הוא מרחב מנה של קבוצת קנטור!

3. פונקצית מנה יכולה להיות לא פתוחה ולא סגורה.

דוגמה א: נניח $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \vee y = 0\}$ (תת מרחב של \mathbb{R}^2).

נגדיר פונקציה $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x, y) = x$ (צמצום של הטלה).

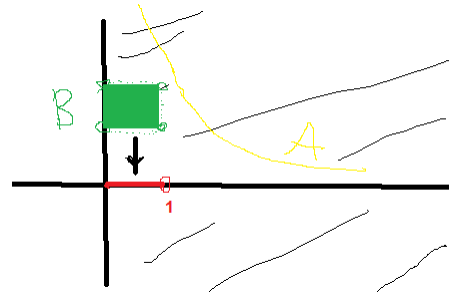
אז f פונקצית מנה אבל f לא סגורה ולא פתוחה.

פתרון: צמצום על ציר X מגדיר הומיאומפיזם (בעצם הפונקציה המקורית היא רטרקציה).

לכן $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ מנה לפי משפט הצמצום.

f לא פתוחה: $B := [0, 1) \times (2, 3)$ פתוחה ב X . אבל $f(B) = [0, 1)$ לא פתוחה ב \mathbb{R} .

f לא סגורה: $A := \{(x, \frac{1}{x}) : x > 0\}$ סגורה ב X . אבל $f(A) = (0, \infty)$ לא סגורה ב \mathbb{R} .



דוגמה ב: עבור הפונקציה $f : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 1 \leq x \end{cases}$

טופולוגית מנה על $Y = \{0, 1\}$ היא טופולוגית סרפינסקי $\sigma = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$.

$f : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ לא פתוחה ולא סגורה (דוגמה נוספת בהמשך).

בנוסף שימו לב שמרחב מנה (שהוא מרחב סרפינסקי) לא T_1 .

4. בהעתקות מנה אקסיימות הפרדה לא תמיד נשמרות.

למשל בדוגמה הקודמת ב או בדוגמה של \mathbb{R} / \mathbb{Q} .

הערה: מרחב מנה הוא בעל תכונת T_1 אם"ם כל מחלקת שקילות היא סגורה.

הערה: ראו גם קובץ מידע נוסף על מרחב מנה