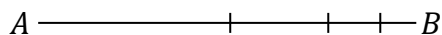


חשבון אינפיניטסימלי 1

חסמים

הפרדוקס של Zeno



תנועה בלתי אפשרית.

ניתן לנתח תנועה מנקודה A לנקודה B כתנועה בשלבים, כאשר בכל שלב יש לעבור מחצית מהדרך שנותרה. הזמן שלוקח לעבור כל שלב חיובי, ויש אינסוף שלבים. פתרון לפרדוקס נראה בהמשך הקורס.

הערה

המספרים שנוכר בקורס הם המספרים הממשיים, הכוללים את המספרים הרציונאליים ואת המספרים האי רציונאליים ($\dots e, \pi, \sqrt{2}$).

הערה

אותיות לועזיות קטנות a, b, c, \dots יציינו מספרים ממשיים, אלא אם נאמר אחרת.

אותיות לועזיות גדולות A, B, C, \dots יציינו קבוצות של מספרים ממשיים, אלא אם נאמר אחרת.

הערה

\mathbb{R} הוא שדה סדור. הוא שדה שיש עליו יחס סדר " $<$ ", כך שלכל שני מספרים, אחד גדול מהשני ("סדר מלא"), ומתקיימות התכונות הבאות:

1. אם $a < b$, אז לכל c : $a + c < b + c$.

2. אם $a < b$, אז לכל $0 < c$: $ac < bc$.

תרגיל

מהתכונות הנ"ל של המספרים הממשיים, ניתן להסיק את כל התכונות המוכרות.

למשל, חיבור אי שוויונים:

אם $a \leq b$ ו- $c \leq d$ אז $a + c \leq b + d$.

הגדרה

יהיו $a < b \in \mathbb{R}$.

נגדיר קטעים:

• קטע סגור:

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

• קטע פתוח:

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

• קטע "חצי פתוח":

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

הגדרה

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$.

המקסימום של A הוא האיבר הגדול ביותר ב- A , אם קיים, ומסומן: $\max(A)$.

דוגמה

מקסימום	קבוצה
b	$[a, b]$
b	$(a, b]$
לא קיים	(a, b)
לא קיים	$[a, b)$

סימון

יהיו $A \subseteq \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$.

$a \leq b$: אם לכל $a \in A$.

דוגמה

$$\left\{1 - \frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \leq 1$$

$$\not\leq 1 - \frac{1}{10^2}$$

הגדרה

יהיו $A \subseteq \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$.

b חסם מלעיל לקבוצה A אם $A \leq b$.

דוגמה

1. כל $k \in \mathbb{R}, 1 \leq k$ חסם מלעיל לקבוצה $\{1 - 1/n | n \in \mathbb{N}\}$. לקבוצה הנ"ל אין מקסימום.

2. לקבוצות $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ אין חסם מלעיל.

הערה

מקסימום הוא חסם מלעיל.

למשל:

$$\max([0,1]) = 1$$

ואכן:

$$[0,1] \leq 1$$

הגדרה

קבוצה היא **חסומה מלעיל** אם קיים לה חסם מלעיל.

כלומר, $A \subseteq \mathbb{R}$ חסומה מלעיל אם קיים $b \in \mathbb{R}$ כך ש: $A \leq b$.

דוגמה

קבוצת חסמי המלעיל	קבוצה
$[1, \infty]$	$[0,1]$
\emptyset	\mathbb{R}
\mathbb{R}	\emptyset

הגדרה

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$.

חסם עליון (סופרמום) הוא החסם מלעיל הקטן ביותר של A , אם קיים, ויסומן: $\sup(A)$.

כלומר, $b \in \mathbb{R}$ חסם עליון של A אם:

1. $A \leq b$

2. לכל $c \in \mathbb{R} : A \leq c$: $b \leq c$.

דוגמה

חסם עליון	קבוצה
b	$[a, b]$
b	$[a, b)$
1	$\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
לא קיים	\mathbb{N}
לא קיים	\emptyset

אקסיומת החסם העליון

לכל קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל של מספרים ממשיים, קיים חסם עליון.

כלומר, לכל $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, אם קיים $b \in \mathbb{R}, A \leq b$, אז $\sup(A)$ קיים.

למה

אם לקבוצה יש חסם עליון, אז הוא יחיד.

הוכחה

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$.

יהיו $b, c \in \mathbb{R}$ חסמים עליונים של A .

בפרט, b חסם מלעיל, לכן (c חסם עליון):

$$c \leq b$$

בפרט, c חסם מלעיל, לכן (b חסם עליון):

$$b \leq c$$

לכן:

$$b = c$$

■

למה

מקסימום הוא סופרמום.

הוכחה

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$.

נסמן:

$$a := \max(A)$$

עפ"י הגדרת המקסימום:

$$A \leq a$$

יהי $A \leq c \in \mathbb{R}$.

עפ"י הגדרת המקסימום:

$$a \in A$$

לכן:

$$a \leq c$$

לכן:

$$a = \sup(A)$$

■

למה

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$.

אם $\sup(A) \in A$ קיים, אז $\sup(A) = \max(A)$.

למה

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$.

$a = \sup(A)$ אם ורק אם $A \leq a$ ולכל $b < a$, קיים $c \in A$ כך ש: $b < c$.

הוכחה



נניח $a = \sup(A)$.

לכן:

$$A \leq a$$

יהי $b < a$.

נניח בשלילה כי:

$$A \leq b$$

לכן, $a = \sup(A)$:

$$a \leq b$$

לכן:

$$a < a$$

סתירה.

לכן:

$$A \not\leq b$$

לכן, קיים $c \in A$ כך ש:

$$b < c$$



תרגיל!



הגדרה

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$.

המינימום של A הוא האיבר הקטן ביותר ב- A , אם קיים, ומסומן: $\min(A)$.

סימון

יהיו $A \subseteq \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$.

$b \leq a : a \in A$ לכל $a \in A$

הוכחה

יהיו $A \subseteq \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$.

b חסם מלרע לקבוצה A אם $b \leq A$.

הגדרה

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$.

חסם תחתון (אינפימום) הוא החסם מלרע הגדול ביותר של A , אם קיים, ויסומן: $\inf(A)$.

למה

אם לקבוצה יש חסם תחתון, אז הוא יחיד.

למה

מינימום הוא חסם תחתון

למה

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$.

$a = \inf(A)$ אם ורק אם $a \leq A$ ולכל $a < b$, קיים $c \in A$ כך ש: $c < b$.

למה

לכל קבוצה לא ריקה וחסומה מלרע של מספרים ממשיים, קיים חסם תחתון.

■