אינפי 1 – תרגיל 8

1. הגדרות גבול של פונקציות:

<u>קושי</u>: $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל x המקיים $0<|x-x_0|<\delta$ מתקיים ש $|f(x)-l|<\varepsilon$

<u>היינה</u>: $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ אם לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $\forall n: x_n\neq x_0$ וגם $\lim_{n\to\infty} x_n=x_0$ (שימו לב זה גבול של סדרה, לא של פונקציה) מתקיים שהסדרה $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ מקיימת $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=l$ (שוב, זה גבול של סדרה ולא גבול של פונקציה).

a. הוכיחו שאם $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ לפי היינה אז $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ לפי קושי (תניחו בשלילה שזה לא גבול לפי קושי, ומצאו לכן סדרה שסותרת את תנאי היינה)

הוכחה: נניח בשלילה שזה לא גבול לפי קושי. לכן קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $\delta>0$ קיים x כך ש $0<|x-x_0|<\delta$ אבל $|f(x)-l|\geq\varepsilon$ ניקח $\delta_1=1$ ול x המתאים לו נקרא x_1. ניקח $0<\delta_2<\frac{1}{2}$ ולכן קיים x_2 המקיים $0<|x_2-x_0|<\frac{1}{2}$ ו $|f(x_2)-l|\geq\varepsilon$. נמשיך כך לבנות סדרה x_n המקיימת $0<|x_n-x_0|<\frac{1}{n}$ ולכן $x_n\to x_0$ ו $x_n\neq x_0$ אבל לפי הבנייה $\forall n: |f(x_n)-l|\geq\varepsilon$ בסתירה לכך שלפי היינה $f(x_n)\to l$

b. הוכיחו שאם $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ לפי קושי אז $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ לפי היינה

הוכחה: תהי סדרה $x_n\to x_0$ המקיימת $x_n\neq x_0$. לכן לכל $\delta>0$ קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $|x_n-x_0|<\delta$ אבל $x_n\neq x_0$ ולכן $0<|x_n-x_0|<\delta$. כעת, לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $0<|x-x_0|<\delta$ מתקיים $|f(x)-l|<\varepsilon$. אבל אז לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ שמקיים לפי ההתחלה, שקיים n_0 כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $0<|x_n-x_0|<\delta$ ולכן $|f(x_n)-l|<\varepsilon$ ולכן $f(x_n)\to l$ כפי שרצינו.

2. הוכח לפי הגדרת קושי ש $\lim_{x\to 7}\frac{x^2-x-6}{x-8}=-36$

פתרון: יהי $\varepsilon>0$ צריך למצוא $\delta>0$ כך שלכל $0<|x-7|<\delta$ מתקיים $|f(x)+36|<\varepsilon$.

$\left|\frac{x^2-x-6}{x-8}+36\right|=\frac{|x+42||x-7|}{|x-8|}$.

$|x-7|<\delta \Leftrightarrow -\delta<x-7<\delta \Leftrightarrow -\delta+49<x+42<\delta+49$. ניקח $\delta<1$ ולכן $|x+42|<50$.

בצורה דומה $-\delta<x-7<\delta \Leftrightarrow -\delta-1<x-8<\delta-1$ עבור $\delta<\frac{1}{2}$ מקבלים

ובסה"כ אנו מקבלים $-1\frac{1}{2} < x-8 < -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < 8-x < 1\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < |8-x|$

ולכן $\delta < \min(1, \frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{100})$ ניקח . $|f(x)+36| = \frac{|x+42||x-7|}{|x-8|} < \frac{50\delta}{\frac{1}{2}} = 100\delta$

$|f(x)+36| < 100\frac{\varepsilon}{100} = \varepsilon$

3. מצא, והוכח לפי הגדרת היינה את הגבול $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

פתרון: תהי סדרה $x_n \to 0$. לכן $f(x_n) = x_n \sin\left(\frac{1}{x_n}\right)$ אבל זה בדיוק סדרה חסומה כפול סדרה ששואפת לאפס ולכן לפי משפט $f(x_n) \to 0$. זה נכון לכל סדרה x_n כנ"ל ולכן לפי היינה הגבול הינו אפס.

4. מצא, והוכח לפי הגדרת קושי את הגבול $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x+1}$

פתרון: נוכיח כי הגבול הינו אפס: יהי $\varepsilon > 0$ צריך למצוא $\delta > 0$ כל שלכל $0 < x < \delta$ מתקיים $\left|\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right| < \varepsilon$. ניקח $0 < x \Rightarrow 1 < x+1$

$0 < x < \delta \Rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{\delta}$

ולכן $\left|\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right| < \frac{\sqrt{\delta}}{1}$

ניקח $\delta < \varepsilon^2 \Rightarrow \sqrt{\delta} < \varepsilon$

ולכן $\left|\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right| < \varepsilon$.

5. הוכח לפי הגדרת קושי ש $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{1}{2}$

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$ צ"ל $\delta > 0$ כך שאם $0 < |x-1| < \delta$ אזי $\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$. נפתח

$$\left|\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2-\sqrt{x}-1}{2\left(\sqrt{x}+1\right)}\right| = \left|\frac{1-\sqrt{x}}{2\left(\sqrt{x}+1\right)}\right|$$

אבל $-\delta < x-1 < \delta \Rightarrow -\delta < \left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right) < \delta$ ולכן $\sqrt{x}+1 \ge 1$

ולכן $\sqrt{x}-1 \le \left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right) < \delta$ ניקח $\left|\frac{1-\sqrt{x}}{2\left(\sqrt{x}+1\right)}\right| \le \frac{\delta}{2\cdot 1}$ ולכן $\delta < 2\varepsilon$ $\left|\frac{1-\sqrt{x}}{2\left(\sqrt{x}+1\right)}\right| \le \varepsilon$

6. תהי f מוגדרת וחסומה בקטע $[0,1]$. הוכח/הפרך: קיימת נקודה $x_0 \in [0,1]$ כך שקיים הגבול $\lim_{x \to x_0} f(x)$

הפרכה: $f = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ מוגדרת וחסומה ב $[0,1]$ ($|f| \le 1$). אבל ראינו שאין לפונקציה גבול באף נקודה (קל לראות לפי היינה בעזרת סדרות רציונאליות ואי רציונאלית ששואפות ל x_0)

7. נסח את שלילת הגבול לפי קושי

ניסוח: l אינו הגבול של $f(x)$ בנקודה x_0 אם קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $\delta > 0$ קיים x המקיים $0 < |x-x_0| < \delta$ אבל $|f(x)-l| \ge \varepsilon$

8. תהי f המוגדרת על ידי $f = \begin{cases} 1-x & x \in \mathbb{Q} \\ x^2 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. האם קיימת נקודה a כך שקיים הגבול $\lim_{x \to a} f(x)$? הוכח.

פתרון:

קודם כל, נוכיח שבנקודות בהן $x^2 \ne 1-x$ אין גבול לפונקציה. נניח x_o נקודה כזו, אז $x_0^2 \ne 1-x_0$.

ניקח את $\varepsilon = \frac{\left|x_0^2-(1-x)\right|}{2} > 0$ (זה בדיוק חצי המרחק בין הערכים $x_0^2, 1-x_0$). ניקח סדרה $x_0 \ne x_n \to x_0$ המכילה אינסוף רציונאליים, ואינסוף אי רציונאליים. מכיוון שהפונקציות $x^2, 1-x$ רציפות אזי לסדרה $f(x_n)$ יש תת סדרה ששואפת ל x_0^2 ותת סדרה ששואפת ל $1-x_0$, לכן יש לה גבולות חלקיים שונים ולכן אינה מתכנסת ולכן אין גבול לפי הגדרת היינה.

כעת, נוכיח שבנקודות בהן $x^2 = 1-x$ יש גבול. ניקח סדרה כלשהי $x_0 \ne x_n \to x_0$, ונחלק אותה לתת סדרה המכילה את הרציונאליים, ותת סדרה המכילה את האי רציונאליים ונפעיל עליהן את הפונקציה. שתיהן יתכנסו לפי האמור לעיל ל $x_0^2 = 1-x_0$ וכפי שראינו בכיתה, אם הסדרה מתחלקת בדיוק לשני חלקים וכל אחד מהם שואף לאותו גבול, אזי הסדרה שואפת לאותו גבול כלומר $f(x_n) \to x_0^2 = 1-x_0$, לכן יש גבול לפי הגדרת היינה.

לכן יש גבול בלבד כאשר $x^2 = 1-x$ כלומר בנקודות $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

הערה: ברור שניתן להכליל את ההוכחה עבור $f=\begin{cases} g(x) & x\in\mathbb{Q} \\ h(x) & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$, כאשר $g(x),h(x)$ רציפות אזי f ל רציפה ב x אם"ם $g(x)=h(x)$.

9. תהי f כך שקיים הגבול $\lim_{x\to x_0} f(x)$ לכל $x_0\in\mathbb{R}$. הוכח/הפרך: לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל x_0 ולכל x המקיימים $0<|x-x_0|<\delta$ מתקיים $\left|f(x)-\lim_{x\to x_0} f(x)\right|<\varepsilon$. במילים אחרות, לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ שמתאים ללא תלות ב x_0. [רמז: $f=x^2$]

הפרכה: ניקח $f=x^2$ ו $\varepsilon=1$ ונראה שאין אף $\delta>0$ כזה. כלומר, לכל $\delta>0$ קיימים x,x_0 כך ש $0<|x-x_0|<\delta$ אבל $\left|f(x)-\lim_{x\to x_0} f(x)\right|\ge 1$. ניקח $x=x_0+\frac{\delta}{2}$ ולכן $0<|x-x_0|=\frac{\delta}{2}<\delta$ $\left|f(x)-\lim_{x\to x_0} f(x)\right|=\left|x^2-x_0^2\right|=|x+x_0||x-x_0|=\left(2x_0+\frac{\delta}{2}\right)\frac{\delta}{2}$. כעת אם ניקח $x_0>\frac{1-\frac{\delta^2}{4}}{\delta}$ נקבל $\left|f(x)-\lim_{x\to x_0} f(x)\right|\ge 1$.