בוחן בדידה 1 למהנדסים, 116-83, תשעז

ג' סיון, 28.5

מתרגל: אריאל ויצמן.

- ענו על כל השאלות.
- הקפידו על סדר וניקיון.
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי - מומלץ להתחיל עם השאלות שעליהן אתם יודעים לענות.
- מבנה הבוחן וניקוד: בבוחן 6 סעיפים $\times$ 20 נקודות לכל סעיף = 120 נקודות בסה"כ.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שעליהן אתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה!

1. א. פרדיקט P מעל השלמים ייקרא "נחמד" אם מתקיים:

$$\exists a \in \mathbb{Z} : [P(a) \to P(a+1)] \equiv T$$

הוכיחו שכל פרדיקט הוא נחמד. (20 נקודות)

ב. יהי P פרדיקט מעל השלמים. האם הפסוק הבא הוא טאוטולוגיה:

$$[\forall x \exists y P(x,y) \wedge \forall y \exists x P(x,y)] \to [\forall x \exists y (P(x,y) \wedge P(y,x))]$$

הוכיחו או הביאו דוגמא נגדית. (20 נקודות)

<u>פתרון:</u>

א. הוכחה: יהי P פרדיקט. אם קיים $a \in \mathbb{Z}$ כך ש־$P(a) = F$ אז, לפי הגדרת הקשר גרירה, נקבל שאכן $P(a) \to P(a+1) \equiv T$ וסיימנו. אחרת, לכל $a \in \mathbb{Z}$ מתקיים $P(a) = T$, ולכן לכל a מתקיים $P(a) \to P(a+1) \equiv T$.

ב. לא נכון. לדוגמא, ניקח את הפרדיקט $P(x,y) := x > y$. כמובן ש־$\forall x \exists y P(x,y)$ (קחו $y = x-1$), וגם $\forall y \exists x P(x,y)$ (קחו $x = y+1$), אבל לא מתקיים $\forall x \exists y (P(x,y) \wedge P(y,x))$, שהרי למשל עבור $x = 0$ אין מספר y המקיים: $(0 > y) \wedge (y > 0)$.
הערה: ניתן להוכיח שזה תמיד לא נכון (ולא רק עבור 0).

2. תהיינה $A, B \subseteq U$ קבוצות (U הקבוצה האוניברסלית לדיוננו). הוכיחו או הפריכו:
א. $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$. (20 נקודות)
ב. $P(A \cup B) \subseteq P(A) \cup P(B)$. (20 נקודות)
ג. $A \triangle B = A^c \triangle B^c$. (20 נקודות)

<u>פתרון:</u>

א. הוכחה: תהי $X \in P(A) \cup P(B)$ אזי $X \in P(A) \vee X \in P(B)$ כלומר $X \subseteq A \vee X \subseteq B$ ולכן, בכל מקרה, $X \subseteq A \cup B$ (כי $(A \subseteq A \cup B) \wedge (B \subseteq A \cup B)$), ולכן $X \in P(A \cup B)$.

ב. הפרכה: ניקח $U = \mathbb{N}, A = \{1\}, B = \{2\}$ אזי: $\{1,2\} \in P(A \cup B)$, אבל $\{1,2\} \notin P(A) \wedge \{1,2\} \notin P(B)$ ולכן $\{1,2\} \notin P(A) \cup P(B)$.

ג. הוכחה: נשתמש בהגדרת הפרש סימטרי כ־$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. לכן נקבל:

$$x \in A \triangle B \iff (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \iff (x \notin A^c \wedge x \in B^c) \vee (x \notin B^c \wedge x \in A^c).$$

כעת מקומוטטביות הקשרים "או" ו"וגם" נקבל:

$$\iff (x \in A^c \wedge x \notin B^c) \vee (x \in B^c \wedge x \notin A^c) \iff x \in A^c \triangle B^c.$$

הסתכלות נוספת: ראינו בתרגיל שהאיברים בהפרש הסימטרי אילו האיברים הנמצאים במספר אי־זוגי של קבוצות. לכן, עבור 2 קבוצות, אילו האיברים הנמצאים בדיוק בקבוצה אחת. ולכן הם **לא נמצאים** בדיוק בקבוצה אחת. לכן, אם מסתכלים על המשלימים, זה אומר שהם במשלים של קבוצה אחת בדיוק. לכן הם בהפרש הסימטרי של המשלימים.

3. תהי $A \subseteq U$ קבוצה (U הקבוצה האוניברסלית לדיוננו). נגדיר סדרת קבוצות באופן רקורסיבי:

$$A_0 = A$$

$$\forall 0 < n \in \mathbb{N} : A_n = A_{n-1}^c \cup A$$

הוכיחו שלכל n אי־זוגי $A_n = U$, ולכל n זוגי $A_n = A$. (20 נקודות)

עבור n אי־זוגי נוכיח באינדוקציה. בסיס: $A_1 = A_0^c \cup A = A^c \cup A = U$. נניח נכונות ל־$n$ ונוכיח ל־$n+2$:

$$A_{n+2} = A_{n+1}^c \cup A = (A_n^c \cup A) \cup A \stackrel{*}{=} (U \cup A) \cup A = U \cup A = U$$

כאשר בשיוויון $*$ השתמשנו בהנחת האינדוקציה.

כעת, עבור n זוגי: ראשית עבור $n = 0$ הדבר נכון לפי הגדרה. עבור $n \geq 2$ זוגי נשים לב ש־

$$A_n = A_{n-1}^c \cup A$$

אבל לפי מה שהוכחנו לגבי אי־זוגי נקבל ש $A_{n-1}^c = \phi$ ולכן נקבל

$$A_n = A_{n-1}^c \cup A = \phi \cup A = A$$