דיברנו על מפות מ$U \subseteq \mathbb{R}^2$ לתוך משטחים הנתונים ב$\mathbb{R}^3$. דיברנו גם על מסלולים ממעגל היחידה("שעון") למעגל לU, שממופים כך לתוך היריעה ב$\mathbb{R}^3$.

דיברנו גם על קוים גיאודזיים - קוים שנחשבים ישרים בתוך היריעה. למרות שהם לא באמת ישרים ב$\mathbb{R}^3$(כי היריעה עצמה לאו דווקא ישרה), ניתן להגדיר אותם כך שאם לוקחים שני נקודות קרובות עליהם, הנורמל בשתי הנקודות נותן אותו היטל על המשיק למשטח בנקודה קרובה.

משוואות הקו הגיאודזי הן:

$$\ddot{\gamma}^k + {\Gamma^k}_{ij}\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j = 0$$

נשים לב שזו לא משוואה בודדת, אלא n משוואות עבור $\mathbb{R}^n$, שכן זה צריך להתקיים לכל $1 \leq k \leq n$.

את סימני כריסטובל ניתן לחשב ע"י

$${\Gamma^k}_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}\left(g_{li,j} + g_{lj,i} - g_{ij,l}\right)$$

כלומר הם תלויים רק במטריקה, מה שאומר שהם תכונות פנימיות.

שדות וקטוריים, זרמים, ונגזרת לי

הגדרה

שדה וקטורי הוא פונקציה $v : a \in M \to T_aM$

הגדרה

העקומה $\gamma(t)$ נקראת קו אינטגרלי של שדה וקטורי אם

$$\gamma'(t) = v(\gamma(t))$$

כלומר:

$$\begin{aligned} \left(\gamma^1\right)' &= v^1\left(\gamma^1, \ldots \gamma^n\right) \\ &\vdots \\ \left(\gamma^n\right)' &= V^n\left(\gamma^1, \ldots \gamma^n\right) \end{aligned}$$

נגזרת לי

נגזרת לי של הפונקציה $f : M \to \mathbb{R}$ לפי השדה הוקטורי $v \in T_PM$ מודדת את שינוי הפונקציה בכיוון v.

מסמנים:

$$\mathcal{L}_v f := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\left(\gamma\left(t\right)\right) = \mathrm{d}f\left(v\right) = f_{,i}v^i$$

(γ עקומה אינטגרלית) כאשר עבור $\gamma\left(0\right) = P$ ו-V $\gamma'\left(0\right) = V$.
נגדרת לי היא לינארית בשדה v:

$$\mathcal{L}_{av+bw} f = a\mathcal{L}_v f + b\mathcal{L}_w f$$

כאשר v, w שדות וקטוריים, $a, b \in \mathbb{R}$.
כמו כן, נגזרת לי לינארית ב-f:

$$\mathcal{L}_v\left(f+g\right) = \mathcal{L}_v f + \mathcal{L}_v g$$

וכן

$$\mathcal{L}_v\left(fg\right) = \left(fg\right)_{,i} v^i = f_{,i}gv^i + fg_{,i}v^i = g\mathcal{L}_v f + f\mathcal{L}_v g$$

וכן

$$\mathcal{L}_{e_i} f = f_{,j}\left(e_i\right)^j = f_{,j}\delta_i{}^j = f_{,i}$$

מתקיים:

$$\mathcal{L}_{\hat{\gamma}} f = f_{,\gamma} = \left(\frac{\partial f}{\partial \gamma}\hat{\gamma} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta}\right)\hat{\gamma}$$

קומוטטור \ סוגרי לי(Lie Bracket)

יהיו v, w שדות וקטוריים. הקומוטטור $[v, w]$ מוגדר ע"י

$$\mathcal{L}_{[v,w]} = [\mathcal{L}_v, \mathcal{L}_w] = \mathcal{L}_v\mathcal{L}_w - \mathcal{L}_w\mathcal{L}_v$$

מתקיים:

$$\mathcal{L}_{[v,w]} f = \mathcal{L}_v\mathcal{L}_w f - \mathcal{L}_w\mathcal{L}_v = \mathcal{L}_v\left(f_{,i}w^i\right) - \mathcal{L}_w\left(f_{,i}v^i\right) =$$

$$= w^i\mathcal{L}_v f_{,i} + f_{,i}\mathcal{L}_v w^i - v^i\mathcal{L}_w f_{,i} - f_{,i}\mathcal{L}_w v^i =$$

$$= w^i f_{,ij}v^j + f_{,i}w^i{}_{,j}v^j - v^i f_{,ij}w^j - f_{,i}v^i{}_{,j}w^j =$$

$$= f_{,i}\left(w^i{}_{,j}v^j - v^i{}_{,j}w^j\right)$$

$$\boxed{[v,w]^j = w^i{}_{,j}v^j - v^i{}_{,j}w^j}$$

המשמעות הגיאומטרית

אם הקומוטטור של שני מסלולים הוא אפס, אז המסלולים מגיעים לאותה נקודה.

גראדיאנט

לכל $w \in T_P M$,

$$\mathcal{L}_w f = \mathrm{d} f\left(w\right) = \left\langle \nabla f, w \right\rangle$$

אם $w = w^i e_i$ כאשר $e_i = r_{,i}$ אז

$$\left\langle \nabla f, w \right\rangle = g_{ij} \left(\nabla f\right)^i w^j$$

$$\mathrm{d} f\left(w\right) = J_f\left(w\right) = \left(f_{\prime 1}, \ldots f_{\prime n}\right) w$$

בעיקרון, אפשר לכתוב:

$$f_{\prime k} w^k = g_{ij} \left(\nabla f\right)^i w^j$$

$$g^{li} f_{\prime k} w^k = \underbrace{g^{li} g_{ij}}_{=\delta^l{}_j} \left(\nabla f\right)^i w^j$$

$$g^{li} f_{\prime k} w^k = \left(\nabla f\right)^i w^l$$

$$\left(\nabla f\right)^i = g^{ij} f_{\prime j}$$

דוגמה

$f\left(x,y,z\right) = z$ על פני ספירת היחידה. פרמטריזציה לספירת היחידה היא $r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$.

$$g = \begin{pmatrix} \sin^2\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin^2\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נרשום את f לפי הקואורדינטות של המפה:

$$f\left(\varphi, \theta\right) = \cos\theta$$

ונחשב גראדיאנט:

$$\nabla f = g^{-1} \mathrm{d} f = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin^2\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d}\varphi} \\ \frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d}\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin^2\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

תכונות הקומוטטור

אנטי סימטרי

$$[v,w] = -[w,v]$$

זהות יעקובי Jacobi Identity

לכל u,v,w:

$$[[u,v],w] + [[v,w],u] + [[w,u],v] = 0$$

נגזרת קו־וריאנטית

נגזרת בכיוון הקואורדינטות אפשר לחשב ע"י $v_{/j} \equiv \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x^j}$, אבל איך מחשבים עבור כיוונים אחרים?

נגזרת קו־וריאנטית היא העתקה חלקה המקיימת עבור שדות וקטוריים וקטוריים u,v,w ופונקציה f את התכונות:

1. לינאריות:

$$\nabla_u (av + bw) = a\nabla_u v + b\nabla_u w$$

$$\nabla_{(av+bw)} u = a\nabla_v u + b\nabla_w u$$

2. "התנהגות טנזורית"

$$\nabla_{fu} v = f\nabla_u v$$

3. כלל ליבניץ:

$$\nabla_u (fv) = f\nabla_u + (\mathcal{L}_u f) v$$

ראינו כבר:

$$\nabla_{e_i} e_j = \Gamma^k{}_{ij} e_k$$

$$r_{j\prime i} = \Gamma^{k}{}_{ij} r_k + b_{ij} \hat{n}$$

נפתח:

$$\nabla_w v = \nabla_{w^i e_j} \left(v^j e_j\right) = \left(\mathcal{L}_{w^i e_i} v^j\right) e_j + v^j \nabla_{w^i e_i} e_j =$$

$$= w^i v^j{}_{\prime i} e_j + v^j w^i \Gamma^{k}{}_{ij} e_k$$

לכן,

$$(\nabla e_i v)^m = v^m_{\prime i} + \Gamma^m_{\ ij} v^j$$

מסמנים גם:

$$v^m_{;j} = v^m_{\prime j} + \Gamma^m_{\ ij} v^i$$

כאשר $v\ _{;j}$ זה הנגזרת הקו־וריאנטית של v על ציר הj.

הערה

במערכת קרטזית, אין הבדל בין נגזרת קו־וריאנטית לנגזרת כיוונית רגילה. אבל כאשר משנים את המטריקה, יש הבדל בין גזירה לפי המפה לבין גזירה לפי המשטח ־ כלומר בין גזירה לפי המטריקה של הקואורדינטות(נגזרת רגילה) או לפי המטריקה של המשטח(נגזרת קו־ואריאנטית). ההבדל הזה מתבטא באמצעות הdisplacement vector ־ ה$\Gamma^m_{ij} v^i$ בנוסחה האחרונה.

הערה

ניתן להגדיר נגזרת קו־ואריאנטית גם עבור קו־וקטור:

$$w_{l;m} = w_{l\prime m} - \Gamma^{k}{}_{lm} w_k$$

$$f_{;l} = f_{\prime l}$$

$$a^{lm}{}_{m;p} = a^{lm}{}_{n\prime p} + \Gamma^{l}{}_{kp} a^{km}{}_{n} + \Gamma^{l}{}_{kp} a^{mk}{}_{n} - \Gamma^{k}{}_{np} a^{lm}{}_{k}$$