

משפטי סילוא

- I*: קיימת ת"ח p -סילוא
II: כל ת"ח p -סילוא צמודות
III: יהי r_p מס' ת"ח p -סילוא, אז:
- (i) $r_p \mid |G|$
(ii) $r_p \equiv 1 \pmod p$

מסקנות ושימושים

טענה

כל חבורה מסדר $2p^k$ (כאשר p ראשוני $2 \neq p$) אינה פשוטה.

הוכחה

תהא G חבורה מסדר $2p^k$. לפי משפט סילוא קיימת G ת"ח מסדר p^k . זו ת"ח מאינדקס 2.

תרגיל: ת"ח מאינדקס 2 היא תח"נ.

■

דוגמה

אין חבורה פשוטה מסדר 50

דוגמה אחרת

עובדה

אין חבורה פשוטה מסדר 100

הוכחה

תהא G חבורה מסדר $100 = 2^2 \cdot 5^2$.

לפי סילוא I יש ב- G ת"ח 5-סילוא מסדר 25, H_5 .

לפי סילוא III מס' ת"ח 5-סילוא r_5 מקיים $r_5 \mid 100$ וגם $r_5 \equiv 1 \pmod 5$

מכיוון ש- $r_5 \equiv 1 \pmod 5$, $r_5 \nmid 5$

(*) $r_5 \in \{1, 2, 4\} \Leftarrow r_5 \nmid 100$ וגם $5 \nmid r_5$

$r_5 \equiv 1 \pmod 5$ יחד עם (*) $r_5 = 1$

לכן, מכיוון שיש רק ת"ח מסדר 25, נקבל לכל $x \in G$ $xH_5x^{-1} = H_5$

מסקנה: G אינה פשוטה ■

חבורות דיהדרליות

יהא X_n מצולע משוכלל מסדר n שמרכזו בראשית ואחד מקדקדיו ב $(1, 0)$.
 $I_2(n)$ היא קבוצת ההעתקות הלינאריות שמבירות את המצולע X_n לעצמו.
 ברור ש $I_2(n) \subseteq GL_2(\mathbb{R})$ כי $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in I_2(n)$, סגורה תחת כפל והפכי. לכן
 $I_2(n) \subseteq GL_2(\mathbb{R})$. בפרט, $I_2(n)$ היא חבורה שנקראת החבורה הדיהדרלית.

נסמן: s סיבוב ב $\frac{2\pi}{n}$

ברור $I_2(n) \supseteq \{s^i \mid 0 \leq i \leq n\}$ וכן $s^n = e$.

כמו כן $t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ שיקוף ביחס לציר x - מעביר X_n לעצמו.

מתקיים:

$$t^2 = e$$

$$tst = s^{-1}$$

נחשב את sts :

$$tst = s^{-1} \Rightarrow st = ts^{-1}$$

לכן

$$sts = ts^{-1}s = t$$

מהו ts ? גם שיקוף ביחס לציר אחר.

תרגיל לכל $ts^i, 0 \leq i \leq n$ שיקוף, ואלו כל השיקופים ששומרים על המצולע.

תרגיל באלגברה לינארית: $I_2(n) = \{s^i \mid 0 \leq i < n\} \cup \{ts^i \mid 0 \leq i < n\}$
 כלומר, החבורה הדיהדרלית היא איחוד זר של n שיקופים ו- $n-1$ סיבובים

משפט

לכל $3 \leq n$ טבעי, $I_2(n) = \langle s, t \mid t^2 = e, s^n = e, tst = s^{-1} \rangle$,
 קרי, החבורה הנוצרת ע"י s ו t (כל הסדרות שאותיותיהן (s, t, s^{-1}, t^{-1}) עם יחסי צמצום $(st = ts^{-1} \Leftarrow) tst = s^{-1}, s^n = e, t^2 = e$
 ... (המשך בשיעור הבא)