מבנים אלגברים תשע"ה - פתרון תרגיל 5

1. קבעו (והוכיחו את קביעתכם) אם הפונקציות הבאות הן הומומורפיזם או לא.

   (א) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x)=5x$.
   כן. $f(x+y)=5(x+y)=5x+5y=f(x)+f(y)$.

   (ב) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*$ המוגדרת ע"י $f(x)=5x$.
   לא. למשל $f(1)=5\neq f(1)f(1)=5^2$.

   (ג) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_n$ המוגדרת ע"י $f(a)=a(mod\,n)$.
   כן.
   $f(a+b)=(a+b)(modn)\equiv((a\,modn)+(b\,modn))modn\equiv f(a)+f(b)$.

   (ד) G,H חבורות , $f:G\times H\to H\times G$ המוגדרת ע"י $f(g,h)=(h,g)$.
   כן.
   $f\left((g_1,h_1)(g_2,h_2)\right)=f\left((g_1g_2,h_1h_2)\right)=(h_1h_2,g_1g_2)=(h_1,g_1)(h_2,g_2)=$
   $f\left((g_1,h_1)\right)f\left((g_2,h_2)\right)$

   (ה) עבור חבורה G ואיבר $x\in G$. $f:G\to G$ המוגדרת ע"י $f(g)=x^{-1}gx$.
   כן. $f(gh)=x^{-1}ghx=x^{-1}g(xx^{-1})hx=f(g)f(h)$

   (ו) עבור חבורה כלשהי G, $f:G\to G$ המוגדרת ע"י $f(g)=g^{-1}$.
   לא. למשל ב $GL_2(\mathbb{R})$: $f\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$,
   $f\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$,
   אבל $f\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\right)=f\begin{pmatrix}0&3\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

2. הוכח כי סעיף ד' הוא איזומורפיזם, ושסעיף ג' הוא אפימורפיזם.
   <u>סעיף ד':</u>
   נראה שזה על: יהי $(h,g)\in H\times G$ אזי $f\left((g,h)\right)=(h,g)$.
   נראה שזה חח"ע: נניח $f(g,h)=e_{H\times G}=(e_H,e_G)$ אזי $(h,g)=(e_H,e_G)$ מה שאומר ש $(g,h)=(e_G,e_H)=e_{G\times H}$.
   <u>סעיף ג':</u>
   נראה שזה על: יהי $a\in\mathbb{Z}_n$, אזי יש לו נציג $a\in\{0,\ldots,n-1\}$. נתייחס לנציג זה בתור a, אזי $f(a)=a(modn)$.

3. הוכיחו שאם $\varphi:G\to H$ הומומורפיזם ו- $K\leq G$ אזי $\varphi(K)\leq H$. הסיקו כי $Im\varphi\leq H$.
   נוכיח $\varphi(K)\leq H$ בעזרת הקריטריון הארוך (נראה סגירות לכפל וסגירות להופכי בנפרד):

ראשית, $\varphi(K)\neq\emptyset$ כי $\varphi(e_G)=e_H$ ו $e_G\in K$ (כי K היא ת"ח) ולכן $e_H\in\varphi(K)$.

יהיו $h_1,h_2\in\varphi(K)$ (רוצים להראות $h_1h_2\in\varphi(K)$) , אזי קיימים $k_1,k_2\in K$ כך ש $\varphi(k_1)=h_1,\,\varphi(k_2)=h_2$. ואז $\varphi(k_1k_2)=\varphi(k_1)\varphi(k_2)=h_1h_2$ ומכיוון ו $k_1k_2\in K$ אז קיבלנו ש $h_1h_1\in\varphi(K)$.

יהי $h\in\varphi(K)$ (רוצים להראות $h^{-1}\in\varphi(K)$), אזי קיים $k\in K$ כך ש $\varphi(k)=h$. ואז $\varphi(k^{-1})=\varphi(k)^{-1}=h^{-1}$ ומכיוון ו $k^{-1}\in K$ אז קיבלנו זש $h^{-1}\in\varphi(K)$.

הוכחנו שלכל ת"ח $K\leq G$ מתקיים $\varphi(K)\leq H$. בפרט, G היא ת"ח של עצמה ו $Im(\varphi)=\varphi(G)\leq H$.

4. הוכיחו שאם $\varphi\,:\,G\to H$ הוא איזומורפיזם אזי $K\lhd G\Leftrightarrow\varphi(K)\lhd H$.

$\Longleftarrow$ כמו בתרגיל הקודם $\varphi(K)\leq H$. רק נראה שזו תח"נ: יהי $h\in H$ ונתבונן ב $h\varphi(K)$ (נרצה להראות שזה שווה ל $\varphi(K)h$). φהוא איזו' ובפרט על ולכן יש $g\in G$ כך ש $\varphi(g)=h$.
אזי $h\varphi(K)=\varphi(g)\varphi(K)=\varphi(gK)=\varphi(Kg)=\varphi(K)\varphi(g)=\varphi(K)h$ (שימו לב שהשתמשנו בכל ש K היא נורמלית בG).
$\Longrightarrow$אפשר לעשות באופן דומה. או: להשתמש ב $\varphi^{-1}\,:\,H\longrightarrow G$ (הפונקציה ההפוכה) שגם היא איזומורפיזם.

5. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

(א) קיים מונומורפיזם $GL_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^{16}$
לא. אחרת התמונה הייתה ת"ח לא אבלית של $\mathbb{R}^{16}$ שהיא אבלית, וזה לא יכול להיות.

(ב) קיים אפימורפיזם $\mathbb{C}^*\to(0,\infty)\leq\mathbb{R}^*$
נגדיר $f\,:\,\mathbb{C}^*\to(0,\infty)$ לפי $f(a+bi)=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$. זהו הומומורפיזם שכן ידוע $f(z_1z_2)=|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$. וזו פוקציה על שכן לכל $x\in(0,\infty)$ מתקיים $f(x+0i)=x$.

(ג) קיים איזומורפיזם $\mathbb{R}\to(0,\infty)\leq\mathbb{R}^*$.
ראינו את ההמומומורפיזם $f\,:\,\mathbb{R}\to(0,\infty)$ המוגדר לפי $f(x)=e^x$. נראה שהוא איזומורפיזם.
על: לכל $r\in(0,\infty)$ נקח $x=log(r)$. אזי $f(x)=e^{log(r)}=r$.
חח"ע: נניח $f(x)=1$ (שימו לב ש 1 היא היחידה של $(0,\infty)$ שהיא כפלית), זה אומר ש $e^x=1\Leftarrow x=0$ (שזו היחידה של $\mathbb{R}$ שהיא חיבורית).

(ד) קיים איזומורפיזם $D_5\to\Omega_{10}$
לא יכול להיות איזומורפיזם כי Ω_{10}היא חבורה צקלית ואילו D_5 היא לא (למשל כי אין בה איבר מסדר 10).

6. תארו את הקוסטים השמאליים עבור החבורות ותתי החבורות הבאות:

(א) $G=\mathbb{Z}\,,\,H=5\mathbb{Z}$
$G/H=\{H,\,1+H,\,2+H,\,3+H,\,4+H\,\}$

(ב) $G=\mathbb{R}^2\,,\ H=\mathbb{R}\times\{0\}$
נתבונן בקוסט כללי $(x,y)+H$ ונשים לב ש $(x,y)+H=(0,y)+(x,0)+H=(0,y)+H$
כמו כן, נשים לב שכל 2 קוסטים מהצורה הזאת הם שונים כי:
$(0,x)+H=(0,y)+H \Leftrightarrow (0,x)-(0,y)\in H \Leftrightarrow (0,x-y)\in\mathbb{R}\times\{0\}$
$\Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$
סך הכל: ${}^{G}\!/_{H}=\{(0,y)+H\,|\,y\in\mathbb{R}\}$.

(ג) $G=\Omega_{15}=<\omega>\,,\ H=<\omega^5>$
נתבונן בקוסט כללי $\omega^k H$ לאיזשהו $k\in Z$. מכיוון ש $\omega^{-1}=\omega^{14}$ אפשר להניח ש $0\le k\le 14$.
נחשב מתי קוסטים הם שווים: $\omega^k H=\omega^t H$ אם"ם $\omega^{k-t}\in H$ ואז $\omega^{k-t}=(\omega^5)^r=\omega^{5r}$ כלומר אם"ם $k-t=5r$ לאיזשהו $r \Leftrightarrow k\equiv t(mod5)$ כך שניתן לקחת את k מתוך $\{0,\ldots,4\}$.
אם כן, הקוסטים השונים הם ${}^{G}\!/_{H}=\left\{H,\,\omega H,\,\omega^2H,\,\omega^3H,\,\omega^4H\right\}$.

(ד) $G=U_{30}\,,\ H=\{1,\,11\}$
מחישוב פשוט רואים ש $7H=17H$, $13H=23H$, $19H=29H$ ושכל השאר שונים. ולכן $G/H=\{H,\,7H,\,13H,\,19H\}$.

7. הוכיחו שמנה של חבורה אבלית היא אבלית. כלומר: אם G חבורה אבלית ו $H\lhd G$ אזי חבורת המנה G/H היא אבלית.
תהי G אבלית ו $H\trianglelefteq G$. יהיו $g_1H,\,g_2H\in G/H$ (רוצים להראות שהם מתחלפים).
לפי הגדרת הפעולה $g_1Hg_2H=(g_1g_2)H=(g_2g_1)H=g_2Hg_1H$. ולכן חבורת המנה אבלית.