פונקציות מרוכבות – פתרון תרגיל 8

.1

א. יש את הפיתוח ההנדסי $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$. ע"י גזירה מקבלים

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n$$

ב.

$$z^2 \sin(z) = z^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \left(z - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \left[\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \pi\left(z - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi^2}{4}\right] \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \left[\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \pi\left(z - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi^2}{4}\right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(z - \frac{\pi}{2}\right)^{2n}$$

ג. צריך להפעיל את כלל לופיטל כמה פעמים. התשובה $\frac{z^2}{e^z - 1 - z} = 2 - \frac{2}{3} z + \frac{1}{18} z^2 + O\left(z^3\right)$

2. יש לפונקציה פיתוח לטור טיילור $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. עבור ערכים ממשיים $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ הוא ממשי. בתרגול ראינו שזה אומר שכל המקדמים a_n הם ממשיים ($\overline{a_n} = a_n$). עבור ערכים מדומים, $f(iy) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n i^n y^n$ הוא מדומה טהור. מכאן

$\overline{f(iy)} = -f(iy) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-i)^n y^n = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n i^n y^n$. ע"י השוואת מקדמים מקבלים שכל המקדמים הזוגיים מתאפסים ($a_{2m} = 0$). מכאן ש- $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} z^{2n+1}$ היא אי זוגית.

3. רדיוס ההתכנסות יהיה המרחק בין הנקודה 1 לנקודה הסינגולרית הקרובה ביותר. המכנה הוא סכום הנדסי, וניתן לרשום $\frac{1-z^{12}}{1-z^2} = \sum_{n=0}^{5} z^{2n}$ עבור $z \neq \pm 1$ מכאן שיש סינגולריות בפתרונות של המשוואה $z^{12} = 1$ (חוץ מפלוס ומינוס 1). הנקודה הקרובה ביותר ל-1 היא $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{\pi}{6} i} = e^{\frac{2\pi i}{12}}$ (וגם הצמודה שלה). רדיוס ההתכנסות הוא

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)^2 + \frac{1}{4}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

4. נתון שעבור $|z|$ גדול מתקיים $|f(z)| \leq K |z|^{\alpha}$. אם בנוסף $|z| \geq 1$ אז $|z|^{\alpha} \leq |z|^{\lceil \alpha \rceil}$ ולכן $|f(z)| \leq K |z|^{\lceil \alpha \rceil}$. החישוב מהכיתה (ע"י ML) מוכיח שהפונקציה היא פולינום ממעלה $\leq \lceil \alpha \rceil$