

תרגיל 5 – מופשטת 1 קיץ 2013

שאלה 1

תזכורת: נאמר שחבורה G היא מכפלה ישרה פנימית של ת"ח $X, Y \leq G$ אם:

א. לכל $g \in G$ קיימים $x \in X, y \in Y$ יחידים כך ש- $g = xy$;

ב. לכל $x \in X, y \in Y$ לכל $xy = yx$.

תהא G מכפלה ישרה פנימית של H_1, H_2 ותהא $N \triangleleft G$ תח"נ המקיימת

$$N \subseteq Z(G) \text{ . הוכיחו: } N \cap H_1 = N \cap H_2 = \{e\}$$

שאלה 2

א. נתונות שש חבורות מסדר 40. זהו אילו חבורות איזומורפיות זו לזו:

$$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, U_{10} \times \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{40}$$

ב. מצאו איזומורפיזם מפורש מהחבורה $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_2$ אל החבורה $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{10}$.

שאלה 3

האם קיימת חבורה אבלית G , כך ש- $\exp(G) = 4$, $|G| = 32$, $-1 \in G$ ו- $[G : G^2] = 4$?

הערה: הסימון G^2 בחבורה אבלית הוא למעשה (בכתיב חיבורי)

$$2G = \{2g : g \in G\}$$

שאלה 4

(א) כמה מחלקות צמידות יש בחבורה S_6 ?

(ב) תהא $G = S_4$ הפועלת על הקבוצה $X = \{1, 2, 3, 4\}$ על-ידי $g * x = g(x)$. חשבו

את המייצב של $x = 2$. האם המייצב של $x = 2$ הוא ת"ח נורמלית של G ?
נמקו.

שאלה 5

(א) חשבו את aba^{-1} עבור: (1) $a = (1\ 3\ 5)(1\ 2)$ ו- $b = (1\ 5\ 7\ 9)$.

(2) $a = (1\ 3\ 8)$ ו- $b = (1\ 8\ 3\ 9)$.

(ב) מצאו גודל של מחלקת צמידות $[\beta] = \{g^{-1}\beta g : g \in S_{15}\}$ של האיבר $\beta = (3,2,6,9)$ ואת סדר המייצב של β (תחת הצמדה).

(ג) תהי $H \leq S_9$ תת חבורה הנוצרת על ידי $(123)(789)$ ו- (345) . בניח ש- H פועלת (הפעולה הטבעית) על $X = \{1,2,3,\dots,9\}$. כמה מסלולים יש לפעולה זו ומהו סדרם של מסלולים אלו?

שאלה 6

תזכורת: עבור $H \leq G$ נגדיר את המנרמל (או תורמליזטור) של H ב- G :
 $N(H) := \{g \in G : gH = Hg\}$

הוכיחו:

(א) $N(H) \leq G$ ו- $H \triangleleft N(H) \Leftrightarrow N(H) = G$;

(ב) $H \triangleleft N(H)$;

(ג) אם $H \triangleleft K \leq G$ אזי $K \leq N(H)$.

שאלה 7

השתמשו במשפט קיילי על מנת להציג את U_9 כתת חבורה של S_6 .

שאלת אתגר

תהא G חבורה, ותהיינה $H_1, H_2, K \triangleleft G$ תתי חבורות נורמליות שלה. בניח שמתקיים:

$$1. \quad G = H_1 H_2 K$$

$$2. \quad H_1 \cap (H_2 K) \subseteq K$$

הוכיחו ש- G/K היא מכפלה ישרה פנימית של $H_1 K/K$ ו- $H_2 K/K$.

בהצלחה!