הוכחה של משפט לגבי התנאים הפיתוח של פונקציה $f\in L_1(R)$ לאינטגרל פוריה

משפט תהי נתונה פונקציה $f(x)\in L_1(R)$. נניח שבנוסף בנקודה איפהשהי x שקבענו פונקציה $f(x)$ בעלת את ה- $f'_-(x)$ ו- $f'_+(x)$ והן סופיים. אז מתקיימת נוסחה:

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \text{v.p.}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\sigma}F(\sigma)\,d\sigma \qquad (1)$$

וכאן קמו תמיד

$$F(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\sigma} f(t)\,dt \qquad (2)$$

הערה נוסחה (1) ניתן לרשום גם כן בצורה פתוחה:

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma(t-x)} f(t)\,dt\right]d\sigma \qquad (3)$$

הוכחה אנחנו חוזרים כאן את ההוכחה שניתן למצוא בקורס ישן על נוסחה הבאה:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ix\sigma}F(\sigma)\,d\sigma = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\,\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt,\ \lambda>0 \qquad (4)$$

מטרה שלנו כעת היא למצוא את ההפרש:

$$\Delta := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ix\sigma}F(\sigma)\,d\sigma - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \left|(4)\right| :$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\,\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \qquad (5)$$

להשוואה של מחוברים ב- (5) נרשום את הנוסחה לאת באופן אחר:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt}_{t:=-\xi} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\infty}^{0} f(x-\xi)\frac{\sin(-\lambda\xi)}{-\xi}\,d(-\xi) + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x-\xi)\frac{\sin\lambda\xi}{\xi}\,d\xi + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x-t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt \implies$$

$$\Delta = \left[\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x-t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt - \frac{f(x-0)}{2}\right] +$$

$$+\left[\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt - \frac{f(x+0)}{2}\right] \qquad (6)$$

כעת נשים לב לנוסחאות הבאות:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt = \left|\underline{\underline{\lambda>0}}\right| = \int_{0}^{\infty}\frac{\sin\lambda t}{\lambda t}\,d\lambda t = \left|\lambda t := s\right|$$

$$= \int_{0}^{\infty}\frac{\sin s}{s}\,ds = \frac{\pi}{2}$$

(7) עבור λ שרירותי!

אכן נתן לרשום (6) בצורה אחרת:

$$\Delta = \left[\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x-t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x-0)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt\right] +$$

$$+\left[\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt\right] :=$$

$$:= A + B \qquad (8)$$

מטפלים ב-A ו-B באותו האופן ולכן להלן
נתבונן, נטפל רק את ה-B. נקבע מספר $\delta>0$ שנבחר
אחר-כך. אז:

$$|B| = \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(f(x+t) - f(x+0)\right) \frac{\sin \lambda t}{t}\, dt \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \left(f(x+t) - f(x+0)\right) \frac{\sin \lambda t}{t}\, dt \right| +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \left| \int_\delta^\infty f(x+t) \frac{\sin \lambda t}{t}\, dt \right| + \frac{|f(x+0)|}{\pi} \left| \int_\delta^\infty \frac{\sin \lambda t}{t}\, dt \right| \qquad (9)$$

ובכן בהתאמה קיבלנו:

$$|B| \leq |B_1| + |B_2| + |B_3| \qquad (10)$$

כעת מחוברים B_1, B_2, B_3 נאמוד בנפרד.
נתבונן ב-B_1. לשם כך נבחר את המספר δ קטן עד
כדי כך שמתקיים אי-שוויון:

$$\frac{|f(x+t) - f(x+0)|}{t} \leq 2 \qquad \text{עבור } 0<t<\delta$$

זאת אפשר לעשות כי קיימת נגזרת סופית $f'_+(x)$.
לכן מקבלים:

$$|B_1| = \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \left(f(x+t) - f(x+0)\right) \frac{\sin \lambda t}{t}\, dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{|f(x+t) - f(x+0)|}{t} \cdot |\sin \lambda t|\, dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\delta 2 \cdot 1\, dt = \frac{2}{\pi}\delta \qquad (11)$$

כעת נתבונן ב-B_2.

לשם כך נגדיר את הפונקציה חדשה $g(t)$:

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{f(x+t)}{\pi t}, & t \geq \delta \\ 0, & t < \delta \end{cases} \qquad (12)$$

קל לבדוק ש $g \in L_1(R)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|dt = \int_{\delta}^{\infty} \frac{|f(x+t)|}{\pi t} dt \leq \frac{1}{\pi \delta} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)| d\xi < \infty$$

לכן לפי משפט של רימן-לבג מקבלים:

$$B_2 = \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\infty} f(x+t) \frac{\sin \lambda t}{t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \sin \lambda t \, dt \to 0$$

כאשר $\lambda \to \infty$ (13)

ובסופו של דבר

$$|B_3| = \left| \frac{f(x+0)}{\pi} \int_{\delta}^{\infty} \frac{\sin \lambda t}{t} dt \right| = \left| \lambda t := s \right| =$$

$$= \frac{|f(x+0)|}{\pi} \left| \int_{\lambda\delta}^{\infty} \frac{\sin s}{s} ds \right| \to 0,$$ עבור $\lambda \to \infty$ (14)

כי אינטגרל דיריכלה מתכנס:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin s}{s} ds = \frac{\pi}{2}$$

ובכן, נקבע $\varepsilon > 0$ (מספר שרירותי). נבחר δ מספיק קטן כך שמתקיים אי-שוויון

$$|B_1| \leq \frac{2}{\pi} \delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

אחר כך λ מספיק גדול כך שמתקיימים אי-שוויונים:

$$|B_2| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$ (ראה (13))

$$|B_3| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$ (ראה (14))

לכן

$$|\Delta| \leq |B_1| + |B_2| + |B_3| < \varepsilon$$

מכאן אחרי מעבר לגבול כאשר $\lambda \to \infty$ (ראה (6)) מקבלים משפט.