

חשבון אינפי 1 למדמ"ח

תרגיל 10

1. חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בכלל לופיטל) :

א.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + x^{-1}}{1 + \sqrt{1-x}}$

ב.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\frac{\pi}{2} - x}$

ג.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - x - 1}$

ד.  $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\tan \frac{\pi}{2} x}$

ה.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x^2)^{1/\ln x}$

ו.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln(1+2e^x))$  רמז:  $(x - \ln(1+2e^x)) = \ln e^{(x - \ln(1+2e^x))}$

ז.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x) \ln x}{1 + \cos(\pi x)}$

ח.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{\sqrt{1-x^2} - 1}$

2. עבור הגבול  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4x}{2x} = -2$  מצאו  $\delta > 0$  ממשי כך שלכל  $0 < |x| < \delta$  מתקיים

$$\left| \frac{x^2 - 4x}{2x} - (-2) \right| < 0.1$$

3. עבור הגבול  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x-1} = -\infty$  מצאו  $B > 0$  ממשי כך שלכל  $x < -B$  מתקיים

$$\sqrt[3]{x-1} < -100$$

4. השתמשו בהגדרת הגבול במונחים של  $\epsilon, \delta$  על מנת להוכיח ש-  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+1}{x} = 4$

5. השתמשו בהגדרת הגבול במונחים של  $A, \delta$  על מנת להוכיח ש-  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{5}{\sqrt{2-x}} = \infty$

6. בכל אחד מהסעיפים הבאים נסחו את הטענה המבוקשת או השלימו את החסר :

א. תהי  $f$  פונקציה המוגדרת בסביבה כלשהי של נקודה  $c$  כולל הנקודה עצמה.

$f$  נקראת \_\_\_\_\_ אם לכל  $\epsilon > 0$  ממשי קיים  $\delta > 0$  ממשי כך שלכל

$$x \text{ המקיים } |x-c| < \delta \text{ מתקיים } |f(x) - f(c)| < \epsilon$$

- ב. נסחו במונחים של  $\varepsilon, \delta$  את הטענה: לפונקציה  $f$  אין גבול בנקודה  $c$ .
- ג. תהי  $f$  פונקציה המוגדרת בסביבה הימנית של הנקודה  $c \in \mathbb{R}$  וכן לכל  $x \approx c, x > c$  מתקיים  $f(x) \approx L$ . נסחו טענה זו במונחים של  $\varepsilon, \delta$ .
- ד. תהי  $f(x)$  פונקציה המוגדרת בסביבה השמאלית של  $x = 2$  כולל הנקודה עצמה. קיים  $\varepsilon > 0$  ממשי כך שלכל  $\delta > 0$  ממשי קיים  $x$  המקיים  $2 - \delta < x < 2$  כך ש-  
 $|f(x) - f(2)| \geq \varepsilon$ . נסחו טענה זו במונחים של אינפיניטסימלים. מה ניתן לומר על התנהגות של הפונקציה משמאל לנקודה  $x = 2$ ?

**בהצלחה!!**