פתרון תרגיל 7

.1

קל לחשב את הפולינום האופייני (לפי ההגדרה): $f_A\left(x\right)=x^2\left(x-1\right)^2$. אזי הפולינום המינימלי הוא מהצורה $m_A\left(x\right)=x^{\alpha}\left(x-1\right)^{\beta}$ עבור $1\le\alpha,\beta\le 2$. נמצא את החזקות.

נתחיל עם α:

$$rank\left(A\right)=rank\begin{pmatrix}1&1&0&0\\-1&-1&0&0\\-2&-2&2&1\\1&1&-1&0\end{pmatrix}=3$$

$$rank\left(A^2\right)=rank\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\-3&-3&3&2\\2&2&-2&-1\end{pmatrix}=2$$

ולכן $\alpha=2$.

כעת עבור β:

$$rank\left(A-I\right)=rank\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&-2&0&0\\-2&-2&1&1\\1&1&-1&-1\end{pmatrix}=3$$

$$rank\left(A-I\right)^2=rank\begin{pmatrix}-1&-2&0&0\\2&3&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=2$$

ולכן $\beta=2$.

לסיכום, הפולינום המינימלי הוא: $m_A\left(x\right)=x^2\left(x-1\right)^2$

2. נמצא פולינום אופייני לכל אחת מהמטריצות :

A : $p(x)=(x-3)(x+1)^2$ והמינימלי $m(x)=(x-3)(x+1)$ - הפ"מ מורכב מגורמים לינאריים שונים בלבד ולכן המטריצה לכסינה וכו'...

B

$f_B(x)=(x-3)^3$ ולכן האופציות לפ"מ הן :

$m1_B(x)=(x-3)$ $\quad m2_B(x)=(x-3)^2$ $\quad m1_B(x)=(x-3)^3$

ניתן לראות בבירור ש $m1_B(x)$ לא יכול להיות פ"מ ולכן יש לבדוק רק את האופציה השנייה שעבורה אם נציב את B לא נקבל את – 0 המיוחל – אך אינו מאפס... ולכן הפ"מ הוא הפ"א. ולכן אינה לכסינה

היא כבר משולשת ולכן בזה סיימנו.

C : הפ"א הוא $p(x)=(x-1)^3$ והו"ע הוא $(0,1,-1)$ ולכן המטריצה ניתנת למישלוש. ניקח את הוקטור שמצאנו ונשלים אותו לבסיס ונשים את הוקטורים במטריצה M ונקבל : $M^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix},M=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\-1&0&0\end{pmatrix}$. נכפיל את המטריצות :

$$M^{-1}CM=\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&-1\\-1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\-1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

קיבלנו שניתן לשלש את המטריצה בשלב אחד בלבד.

.3

כל הסעיפים הם הפרכה. הנה הדוגמאות הנגדיות:

א. $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. שכן מתקיים $f_A(x)=f_B(x)=(x-2)^3$

אך עם זאת $m_A(x)=x-2\neq(x-2)^2=m_B(x)$

ב. ראינו שלמטריצות דומות יש אותו פולינום אופייני, ולכן מספיק למצוא דוגמא למטריצות שיש להן אותו פולינום מינימלי אך לא אותו פולינום אופייני. למשל:

$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ ומתקיים

$m_A(x)=m_B(x)=(x-1)(x-2)$ אך המטריצות לא דומות מכיוון שאין להם את אותו פ"א: $f_B(x)=(x-1)^2(x-2)$, $f_A(x)=(x-1)(x-2)^2$

ג. אותו דוגמא נגדית כמו בסעיף הקודם.

4. הערה : כשכתוב בתשובה T-שמור הכוונה היא T אינווריאנטי :

א. יהי $W=Sp\{v_1,\dots,v_k\}$. נתון כי $Tv_i=\lambda v_i$ $(i=1,\dots,k)$. **לכן**

לכל $v=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i v_i\in W$ מתקיים:

$$Tv=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i Tv_i=\lambda\sum_{i=1}^{k}\alpha_i v_i=\lambda v\in W$$

שכן W הוא תת-מרחב סגור ביחס לכפל בסקלר. לכן W הוא T-שמור

ב. כל תת-מרחב W של התת-מרחב העצמי V_λ נפרש על-ידי וקטורים מתוך V_λ, דהיינו נפרש על-ידי וקטורים השייכים לאותו ערך עצמי λ. לכן על-פי חלק א, W הוא T-שמור.

ג. לא תמיד כל תת-מרחב של תת-מרחב T-שמור אף הוא T-שמור. לדוגמא, התת-מרחב:

$$W = \{(x,y,0) \mid x,y \in R\}$$

הוא שמור תחת הטרנספורמציה T. התת-מרחב:

$$U_2 = Sp\{(1,0,0)\}$$

הוא חלקי ל-W אך הוא איננו T-שמור כפי שראינו בשאלה 1 א.

ד. יהי $W=Sp\{v\}$ תת-מרחב T-שמור. אז $Tv \in W$, ולכן Tv היא כפולה של v: $Tv=\lambda v$. הווה אומר - v הוא וקטור עצמי של T.

ה. הטרנספורמציה:

$$T: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

מוגדרת במרחב דו-ממדי R^2. התת-מרחבים ה-T-שמורים הטריוויאליים של R^2 הם $\{0\}$ ו-R^2. אם יש תת-מרחב לא טריוויאלי, הרי הממד שלו בהכרח 1, ולכן הוא נפרש על-ידי וקטור עצמי של T. בדיקה ישירה מראה, כי ישנם שני וקטורים עצמיים בלתי-תלויים לינארית:

$$v_1 = (1,1) \qquad Tv_1 = v_1$$

$$v_2 = (4,3) \qquad Tv_2 = -v_2$$

ולכן התת-מרחבים ה-T-שמורים הלא טריוויאליים של R^2 הם:

$$W_1 = Sp\{v_1\} \quad , \quad W_2 = Sp\{v_2\}$$

א. תהי:

$$T(x,y,z,u) = \left(\frac{5}{2}x+y-\frac{1}{2}z+u,\ 3y+u,\ \frac{1}{2}x+y+\frac{3}{2}z+u,\ 3u\right)$$

(i)

$$Tv_1 = T(1,0,1,0) = (2,0,2,0) = 2v_1$$

$$Tv_2 = T(1,0,-1,0) = (3,0,-1,0) = v_1 + 2v_2$$

כלומר, Tv_1 ו-Tv_2 שייכים ל-$W_1=\mathrm{Sp}(\{v_1,v_2\})$ ולכן W_1 הוא T-שמור.

(ii)

$$Tv_3 = T(1,1,1,0) = (3,3,3,0) = 3v_3$$

$$Tv_4 = T(1,1,1,1) = (4,4,4,3) = v_3 + 3v_4$$

כלומר, Tv_3 ו-Tv_4 שייכים ל-$W_2=\mathrm{Sp}(\{v_3,v_4\})$, ולכן W_2 הוא T-שמור.

ב. הבדיקה של העובדה שהוקטורים v_1,v_2,v_3,v_4 מהווים בסיס של $\mathbb{R}^4$ היא שגרתית (די לבדוק שהם בלתי-תלויים לינארית. לשם כך יש לדרג את המטריצה ששורותיה הן הוקטורים הללו ולוודא שאין אנו מגיעים לשורת אפסים).

מכאן נובע כי:

$$W_1 + W_2 = \mathrm{Sp}(\{v_1,v_2\}) + \mathrm{Sp}(\{v_3,v_4\}) = \mathrm{Sp}(\{v_1,v_2,v_3,v_4\}) = \mathbb{R}^4$$

כמו כן, מאחר ש-

$$\dim W_1 + \dim W_2 = 4 = \dim \mathbb{R}^4$$

הרי הסכום W_1+W_2 הוא <u>ישר</u>. הראינו אפוא כי $\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2$.

ג. מתוצאות סעיף א של השאלה נובע כי:

$$[T_{W_1}]_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$[T_{W_2}]_{B_2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ד. מתוצאות סעיף א של השאלה נובע כי:

$$Tv_1 = 2v_1 + 0\cdot v_2 + 0\cdot v_3 + 0\cdot v_4$$

$$Tv_2 = v_1 + 2v_2 + 0\cdot v_3 + 0\cdot v_4$$

$$Tv_3 = 0\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + 3\cdot v_3 + 0\cdot v_4$$

$$Tv_4 = 0\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + v_3 + 3\cdot v_4$$

ולכן:

$$[T]_B = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

כלומר (ראה חלק ג):

$$[T]_B = \left(\begin{array}{c|c} [T_{W_1}]_{B_1} & 0 \\ \hline 0 & [T_{W_2}]_{B_2} \end{array}\right)$$