פתרון למבחן אלגברה לינארית 1 קיץ תשעז מועד ב'

1. משפט מההרצאה

2. (א) לא נכון. אפשר לקחת $V=\mathbb{R}^2$ ו $T:V\to V$ להיות

$$T(x,y)=(y,-x)$$

אז קל לראות ש T הפיכה. למשל, ייצוג שלה לפי בסיס סטנדרטי נותן את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

שהיא הפיכה. אבל אם $v=(x,y)$ ומתקיים $T(v)=v$ אז

$$T(x,y)=(x,y)$$

$$(y,-x)=(x,y)$$

$$y=x \quad y=-x$$

ולכן

$$x=y=0$$

כנדרש. ולכן זו דוגמא נגדית.

(ב) בוודאי. ניקח $S=-T+I$ ואז

$$T+S=T-T+I=I$$

שהיא ודאי העתקה הפיכה.

(ג) לא. אפשר לקחת $V = \mathbb{R}^3$ ו $T : V \to V$ המוגדרת לפי

$$T(x, y, z) = (0, x, y)$$

ואז מתקיים $T^3 = 0$ אבל

$$\dim \ker T = 1$$

$$\dim \operatorname{im} T = 2$$

בסתירה.

(ד) נכון. נסמן $\dim V = n$. קודם כל נשים לב ש

$$\ker T \subseteq \ker T^2$$

ולכן

$$n - 1 \leq \dim \ker T \leq \dim \ker T^2$$

אבל

$$\dim \ker T^2 \neq n$$

כי $T^2 \neq 0$ ולכן

$$\dim \ker T^2 = n - 1 = \dim \ker T$$

ולכן

$$\ker T^2 = \ker T$$

כעת נוכיח באינדוקציה ש $T^k \neq 0$. בסיס האינדוקציה $k = 2$ הוא נתון. כעת נניח ש $T^k \neq 0$ ונוכיח ש $T^{k+1} \neq 0$. נניח בשלילה ש $T^{k+1} = 0$ אז לכל $v \in V$ מתקיים

$$T^{k+1}(v) = 0$$

$$T^2(T^{k-1}(v)) = 0$$

ולכן

$$T^{k-1}(v) \in \ker T^2 = \ker T$$

ולכן

$$T(T^{k-1}(v)) = 0$$

$$T^k(v) = 0$$

זה נכון לכל $v \in V$ ולכן $T^k = 0$ בסתירה להנחת האינדוקציה. בזה הוכחנו ש $T^{k+1} \neq 0$ וסיימנו.

3. נפתור את השאלה תחת ההנחה ש $n > 1$. היות ש A הפיכה, מתקיים ש $|A| \neq 0$. נסמן את השורה ה i של A ב $R_i(A)$ כלומר A נראית ככה:

$$A = \begin{pmatrix} R_1(A) \\ \vdots \\ R_n(A) \end{pmatrix}$$

אפשרות א': $|A| \neq 1$. במצב זה נבחר B שנראית ככה:

$$B = \begin{pmatrix} & (\frac{1}{|A|} - 1)R_1(A) & \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

כלומר השורה הראשונה של B היא השורה הראשונה של A כפול $(\frac{1}{|A|} - 1)$ ושאר השורות הן 0. הדרגה של B היא 1 כי יש לה $n-1$ שורות אפסים והשורה הראשונה אינה 0 כי $R_1(A) \neq 0$ (הרי A הפיכה) ו $\frac{1}{|A|} - 1 \neq 0$ כי אמרנו ש $|A| \neq 1$ עכשיו

$$\begin{aligned} |A+B| &= \left| \begin{pmatrix} (1 + \frac{1}{|A|} - 1)R_1(A) \\ \vdots \\ R_n(A) \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} (\frac{1}{|A|})R_1(A) \\ \vdots \\ R_n(A) \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{|A|} \left| \begin{pmatrix} R_1(A) \\ \vdots \\ R_n(A) \end{pmatrix} \right| = \frac{|A|}{|A|} = 1 \end{aligned}$$

כנדרש.

אפשרות ב'. אם $|A|=1$ אז נבחר

$$B=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ & R_1(A) & \end{pmatrix}$$

כלומר $n-1$ השורות הראשונות הן 0 והשורה האחרונה היא השורה הראשונה של A. ברור ש $\operatorname{rank} B=1$ וגם

$$|A+B|=\left|\begin{pmatrix} R_1(A) \\ \vdots \\ R_{n-1}(A) \\ R_n(A)+R_1(A) \end{pmatrix}\right|$$

על ידי ביצוע פעולת שורה

$$R_n=R_n-R_1$$

זה שווה ל

$$\left|\begin{pmatrix} R_1(A) \\ \vdots \\ R_{n-1}(A) \\ R_n(A)+R_1(A) \end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix} R_1(A) \\ \vdots \\ R_{n-1}(A) \\ R_n(A) \end{pmatrix}\right|=|A|=1$$

הערה: היה אפשר לא לפצל למקרים ולמצוא מטריצה B שתתאים בכל מקרה אבל ככה נראה לי יותר קל להסביר.

4. נתון

$$W=\operatorname{span} S$$

כאשר

$$S=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 11 & -5 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 9 & -8 \end{pmatrix}\right\}$$

(א) יש לנו אלגוריתם למצב כזה. נעביר את המטריצות לוקטורי עמודה (פורמלית: ניקח בסיס סטנדרטי ונייצג לפיו את הוקטורים כדי להגיע לוקטורים ב $\mathbb{R}^4$) נשים

את וקטורי העמודה של נו במטריצה אחת גדולה ונדרג

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 9 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 11 & -1 & 9 \\ 1 & -7 & -5 & 2 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2=R_2-3R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 6 & -3 & 9 \\ 3 & 5 & 11 & -1 & 9 \\ 1 & -7 & -5 & 2 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3=R_3-3R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 6 & -3 & 9 \\ 0 & 8 & 8 & -4 & 12 \\ 1 & -7 & -5 & 2 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4=R_4-R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 6 & -3 & 9 \\ 0 & 8 & 8 & -4 & 12 \\ 0 & -6 & -6 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3=R_3-\frac{4}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 6 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 1 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4=R_4+R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 6 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 6 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו שבעמודה השלישית והחמישי יש איבר חופשי ולכן צריך לזרוק מהקבוצה המקורית את הוקטורים השלישי והחמישי. נקבל

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

וזהו.

(ב) נסמן $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ צריך בעצם למצוא ערכים x, y, z, w כלשהם שבשבילם <u>אין</u> פתרון למשוואה

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

כלומר אנחנו מקבלים מערכת משוואות

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x \\ 3 & 3 & 0 & y \\ 3 & 5 & -1 & z \\ 1 & -7 & 2 & w \end{array}\right)$$

הדירוג די דומה לקודם

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x \\ 3 & 3 & 0 & y \\ 3 & 5 & -1 & z \\ 1 & -7 & 2 & w \end{array}\right) \xrightarrow{R_2=R_2-3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x \\ 0 & 6 & -3 & y-3x \\ 3 & 5 & -1 & z \\ 1 & -7 & 2 & w \end{array}\right) \xrightarrow{R_3=R_3-3R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x \\ 0 & 6 & -3 & y-3x \\ 0 & 8 & -4 & z-3x \\ 1 & -7 & 2 & w \end{array}\right) \xrightarrow{R_4=R_4-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x \\ 0 & 6 & -3 & y-3x \\ 0 & 8 & -4 & z-3x \\ 0 & -6 & 1 & w-x \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3=R_3-\frac{4}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x \\ 0 & 6 & -3 & y-3x \\ 0 & 0 & 0 & z-3x-\frac{4}{3}(y-3x) \\ 0 & -6 & 1 & w-x \end{array}\right)$$

אז אם נדאג ש

$$z-3x-\frac{4}{3}(y-3x) \neq 0$$

אנחנו מסודרים. אפשר למשל לקחת $x=y=w=0$ ו $z=1$ כלומר נבחר את המטריצה

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(ג) נפרוש את

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -13 \end{pmatrix}$$

בעזרת הבסיס B,

$$\alpha\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-1&3\\5&-7\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&3\\6&-13\end{pmatrix}$$

עשינו בסעיף הקודם כבר את רוב הדירוג

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-2\\3&3&0&3\\3&5&-1&6\\1&-7&2&-13\end{array}\right)\xrightarrow{R_2=R_2-3R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&2\\0&6&-3&9\\3&5&-1&6\\1&-7&2&-13\end{array}\right)\xrightarrow{R_3=R_3-3R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-2\\0&6&-3&9\\0&8&-4&12\\1&-7&2&-13\end{array}\right)\xrightarrow{R_4=R_4-R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-2\\0&6&-3&9\\0&8&-4&12\\0&-6&1&-11\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3=R_3-\frac{4}{3}R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-2\\0&6&-3&9\\0&0&0&0\\0&-6&1&-11\end{array}\right)\xrightarrow{R_4=R_4+R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-2\\0&6&-3&9\\0&0&0&0\\0&0&-2&-2\end{array}\right)$$

ולכן

$$\gamma=1$$

$$\beta=2$$

$$\alpha=-1$$

כלומר כל שלושת הוקטורים

$$\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&3\\5&-7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}$$

לוקחים חלק בפרישה של $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -13 \end{pmatrix}$ (כלומר, המקדם של כל אחד מהם שונה מ0) אז אפשר להחליף כל אחד מהם בוקטור החדש. לכן אפשר לקחת בתור בסיס את

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

(ד) מגדירים

$$U = \{A \in W \mid A^t = -A\}$$

אם נסמן

$$Z == \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid A^t = -A\}$$

אז

$$U = Z \cap W$$

זה מרחב וקטורי כי הוא חיתוך של שני מרחבים וקטוריים. W הוא מרחב וקטורי לפי הגדרה. ו

$$Z$$

הוא מרחב וקטורי כי אפשר לבדוק בקלות את הקריטריון לתת מרחב. קודם כל הקבוצה הזאת לא ריקה כי

$$0 \in Z$$

הרי ברור ש $0^t = -0 = 0$. בנוסף, אם

$$A, B \in Z$$

אז

$$(A + cB)^t = A^t + cB^t = -A + c(-B) = -(A + cB)$$

ולכן

$$A + cB \in Z$$

ולכן הקריטריון לתת מרחב מתקיים. לסיכום U אכן תת מרחב. כדי למצוא

בסיס נבין רגע איך איברים ב Z נראים. כדי שמטריצה

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

תהיה ב Z צריך שיתקיים

$$\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x & -y \\ -z & -w \end{pmatrix}$$

כלומר

$$x = w = 0 \quad y = -z$$

כלומר רק מטריצות מהצורה

$$\begin{pmatrix} 0 & y \\ -y & 0 \end{pmatrix}$$

כלומר Z הוא מרחב וקטורי ממימד 1. החיתוך $Z \cap W$ יהיה ממימד 1 או 0. צריך להבין רק אם החיתוך טריויאלי ואז המימד 0 או שהחיתוך לא טריויאלי ואז $Z \subseteq W$. אז ננסה להבין למשל אם

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in W$$

כלומר צריך להבין אם יש פתרון ל

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

אז נעשה שוב את הדירוג שעשינו אותו כבר אלף פעם

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & -7 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2=R_2-3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & -7 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3=R_3-3R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 1 \\ 0 & 8 & -4 & -1 \\ 1 & -7 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4=R_4-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 1 \\ 0 & 8 & -4 & -1 \\ 0 & -6 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3=R_3-\frac{4}{3}R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{3} \\ 0 & -6 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

רואים שאין פתרון ולכן החיתוך טריויאלי כלומר

$$U = \{0\}$$

ולכן בסיס יהיה $\varnothing$.

5. נתון כי

$$T(x, y, z) = (0, x, y)$$

ו

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & a \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

(א) T אינה הפיכה ולכן המטריצה המייצגת שלה גם כן צריכה להיות לא הפיכה. למשל הדטרמיננטה שלה צריכה להיות 0. אפשר לחשב את הדטרמיננטה בפיתוח

לפי שורה שניה למשל.

$$0 = \left|\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & a \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}\right| = -1\left|\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\right| + 2\left|\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\right| - a\left|\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\right|$$

$$= -1(9+5) + 2(6+4) - a(10-12) = -14 + 20 + 2a$$

$$a = -3$$

(ב)

$$B = \{b_1, b_2, b_3\}$$

$$tb_1 + sb_2 + b_3 = (0,0,1)$$

נפעיל את T על שני האגפים

$$tT(b_1) + sT(b_2) + T(b_3) = T(0,0,1) = (0,0,0)$$

נייצג את שני האגפים לפי הבסיס C

$$[tT(b_1) + sT(b_2) + T(b_3)]_C = [(0,0,0)]_C = (0,0,0)$$

$$t[T(b_1)]_C + s[T(b_2)]_C + [T(b_3)]_C = (0,0,0)$$

לפי המטריצה המייצגת אנחנו מוצאים ש

$$t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

את המשוואה הזאת אפשר לפתור בעזרת דירוג, אבל זה רק שני נעלמים אפשר פשוט לחשב ישירות. מהשורה הראשונה:

$$2t + 3s - 1 = 0$$

ולכן

$$t = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}s$$

מהשורה השניה:

$$t + 2s - 3 - 0$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2}s + 2s - 3 = 0$$

$$\frac{1}{2}s = \frac{5}{2}$$

ולכן

$$s = 5$$

ו

$$t = -7$$

קל לבדוק גם שאם מציבים זאת בשורה השלישית המשוואה מתקיימת.

(ג) צריך להוכיח ש

$$c_1 + c_2 + c_3 \in \operatorname{Im} T$$

נבצע ייצוג לפי C, אז צריך להוכיח בעצם ש

$$[c_1 + c_2 + c_3]_C \in [\operatorname{Im} T]_C$$

עכשיו

$$[\operatorname{Im} T]_C = C\left(\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}\right)$$

$$[c_1 + c_2 + c_3]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן בעצם צריך להראות ש $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ נמצא במרחב העמודות של

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

כלומר צריך להראות שיש פתרון למערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

טוב. נדרג ונפתור.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 = R_2 - 2R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 15 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 = R_3 - 3R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 = R_3 - 3R_2}$$

הענו לצורה מדורגת בלי שורת סתירה ולכן יש פתרון.

(ד) לפי הנתון

$$T(b_1) = 2c_1 + c_2 + 4c_3$$

$$T(b_2) = 3c_1 + 2c_2 + 5c_3$$

$$T(b_3) = -c_1 - 3c_2 + 3c_3$$

ולכן

$$T(b_2) = 2c_2 + 5c_3 + 3c_1$$

$$T(b_1 + b_3) = c_1 - 2c_2 + 7c_3 = -2c_2 + 7c_3 + c_1$$

$$T(b_1 - b_3) = 3c_1 + 4c_2 + c_3 = 4c_2 + c_3 + 3c_1$$

ולכן

$$[T]_F^E = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

וזהו.