22.11.15

תורת הקבוצות

תרגול 2

בוחן ב- 20.12 !! בזמן התרגול. חומר, שיעור + תרגול 1-6.
בשאלות מתוך ה.ש.ב והתרגולים!

<u>משפט:</u> לכל סודר α בן מנייה. יש תת קבוצה של $\mathbb{Q}$.
עם הסדר הרגיל מ-$\mathbb{Q}$ שטיפוס הסדר שלה הוא α.

<u>הוכחה:</u> ① $\alpha = \emptyset$. תת קבוצה של $\mathbb{Q}$ וטיפוס הסדר שלה הוא 0.

② נוכיח טענה קצת יותר חזקה

נראה שיש תת קבוצה של $[0,1]$ עם טיפוס סדר α.

נניח שיש $W_\alpha \subseteq [0,1]$ עם טיפוס סדר α.

ניתן לבנות פונקציה שומרת סדר מ-$[0,1] \to [0,\frac{1}{2}]$

נקבל $W'_\alpha \subseteq [0,\frac{1}{2}]$ שטיפוס הסדר שלה הוא α.

הקבוצה המבוקשת שלנו תהיה $W_{\alpha+1} = W'_\alpha \cup \{\frac{3}{4}\}$

מספר שרירותי שגדול מ-$\frac{1}{2}$ ב-$[0,1]$.

טיפוס סדר החדש הוא אכן $\alpha+1$!

③ יש סודר גבולי β, והוא בן מנייה.

נניח לכל $\alpha < \beta$ יש $W_\alpha \subseteq [0,1]$ שטיפוס סדר α,

מכיוון ש- β סודר בן מנייה. אפשר לבנות סדרה של סודרים
(עולה) שמתכנסת אליו $\{\alpha_n\} \to \beta$ כלומר $\bigcup \alpha_n = \beta$.

לכל α_n יש $W_{\alpha_n} \subseteq [0,1]$ שטיפוס סדר שלו הוא α_n.

קודם כל נחלק את $[0,1]$ ל- $\aleph_0$ קטעים זרים:

לכל n נסתכל על הקטע $[1-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n+1}]$

אפשר "להעביר" את W_{α_n} לתוך הקטע $[1-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n+1}]$

בדרך לינארית ולכן שומרת סדר!

קיבלנו עותקים W'_{α_n} בתוך הקטע המתאים שגם טיפוס סדר
של α_n! נחסר מכל קבוצה רישא שאיזו' לסודר הקודם.

כלומר למשל מתוך W'_{α_2} נחסר רישא שאיזו' ל- α_1.

קיבלנו קבוצות חדשות $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \ldots$.

ניקח את האיחוד של כל הקבוצות. ונמצא ב- $[0,1]$

ובטיפוס סדר באמת יהיה β! כי $otp(U_{\alpha_n}) = \alpha_n \setminus \alpha_{n-1}$

ואז $otp\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_{\alpha_n}\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha_n \setminus \alpha_{n-1} = \bigcup_{n=1} \alpha_n = \beta$ $(\alpha_0 = \phi)$

כנדרש!

מ.ש.ל!

משפט: (הגדרה ברקורסיה).

באינטואיציה - הגדרת פונקציה ברקורסיה זה להגיד מה הפונקציה חושבת על האיבר הראשון - 0. ואז מה היא עושה על סודר β, בהינתן הפעולה של הפונקציה על כל הסודרים $\alpha < \beta$.

כלומר - תגידו לנו מה חשוב עד עכשיו, נמשיך משם עוד אחד קדימה.

פורמאלית: פונקציות מחלקה $F: A \to B$ היא איפשהו כלל המתאים לכל איבר ב- A מתאים איבר ב- B.

ונקבל: $F: V \to V$ פונקציות מחלקה, אזי קיימת פונקציה מחלקה יחידה ~~[illegible]~~ $G: On \to V$

כך ש- $G(\beta) = F(\{G(\beta) / \beta < \alpha\})$

תרגיל: נבנה פונקציה ברקורסיה וננסה להבין מה היא.

פתרון: נגדיר $F: V \to V$ $V = \{\text{קבוצות סדורות}\}$.

אם A סדורה היטב וטיפוס סדר שלה הוא γ.

אז אם γ עוקב. אז $F(A) = X_\gamma \cup \{\gamma\}$

האיבר המקסימלי ב- A שבגבול עד קבוצה.

~~[illegible]~~

האיבר במקום ה- β.

אם γ גבולי אז $F(A) = \bigcup_{\beta \in \gamma} X_\beta$

אחרת $F(A) = \phi$.

ננסה להבין מה היא G.

$$G(0) = F(\{G(\beta) / \beta < 0\}) = F(\emptyset) = \phi = 0$$

נוכיח שבעצם $G = id$. ~~[illegible]~~

נשתמש באינדוקציה טרנספיניטית.

עבור 0 , $G(0)=0$.

~~[illegible]~~

נניח $G(\beta)=\beta$ לכל $\beta<\alpha$ ונחשב $G(\alpha)$

נניח α עוקב. $G(\alpha)=F(\{G(\beta)/\beta<\alpha\}) =$

$$\underset{\text{הנחה}}{=} F(\{\beta/\beta<\alpha\}) = F(\alpha)$$

כי סוג סדר של הקבוצה α הוא בדיוק α.

כאשר α עוקב לוקחים את האחרון ומוסיפים α.

האיבר האחרון ב- α הוא $\alpha-1$, $\alpha=\alpha-1\cup\{a\}$.

אם α גבולי לוקחים את איחוד כל האיברים ב-α וזה נותן את α שוב.

כדרוש מ.ש.ל!

תרגיל: תהי A קבוצה אינסופית של מספרים טבעיים. הוכיחו שקיימת פונקציה על עולה ממש מ-ω ל-A.

פתרון: נבנה כזו ברקורסיה.

נגדיר פונקציה מחלקה. $F(x)=\begin{cases}\min(A\setminus x) & \text{אם קיים}\\ \min(A) & \text{אחרת}\end{cases}$

[$\min A$ תמיד קיים כי $A\neq\emptyset$ קבוצה של מספרים טבעיים!]

$$G(n) = F(\underbrace{\{G(m)/m<n\}}_{\text{קבוצה סופית!}}) \underset{\text{לכן תמיד!}}{=} \min(\underbrace{A\setminus\{G(m)/m<n\}}_{\neq\emptyset})$$

נוכיח ש- G על ושומרת סדר.

שומרת סדר: נרצה להוכיח $G(n-1)<G(n)$

מההגדרה $G(n-1)=\min A\setminus\{G(0)..G(n-2)\}$

$G(n)$, $G(n-1)$ שניהם ב-A, מההגדרה מקרה את המינימום (של הסופי)

לכן בהכרח $G(n)>G(n-1)$.

על: נניח שהיא לא על, לכן קיים m הראשון שאין לו ~~מקום~~ מקור. בגלל שאנחנו בקבוצה של טבעיים,

יש את המספר האחרון שנמצא לפני m.

לכל האיברים שקטנים מ-m יש מקור!

נסמן את האחרון לפני m ב-K.

ל-K יש מקור. נסמנו n.

$$G(n+1) = \min A \setminus \{G(0) \dots \underbrace{G(n)}_{=K}\}$$

כאן הפונקציה עולה לכן מספיק לשאול מה האיבר הראשון שגדול מ-K. מהגדרת K זה בדיוק m. לכן $G(n+1)=m$. סתירה!

מש"ל!

<u>הגדרה:</u> פונקציה מונוטונית רציפה.

$F: On \to On$ היא <u>מונוטונית</u> אם $\alpha<\beta \Rightarrow F(\alpha)<F(\beta)$.

<u>ורציפה</u> אם $\beta \neq \phi$ גבולי $\Rightarrow F(\beta) = \sup(F(\alpha) / \alpha<\beta)$

<u>דוגמאות:</u> (1) האם הפונקציה העוקב $\alpha \xrightarrow{f} \alpha+1$ מונוטונית ורציפה?

תשובה - לא! אין רציפות כי $\omega \to \omega+1$

אבל ω גבולי ולכן אם רציפה אז $\omega \to \sup\{f(n)/n<\omega\} =$

$= \sup(n+1 / n<\omega) = \omega$

(2) $f: \alpha \to \beta+\alpha$, האם מונוטונית ורציפה?

מונוטונית - ידוע מהמבחן בהרצאה.

רציפות - נניח ש-α גבולי - האם $\sup(\beta+\gamma, \gamma<\alpha) = \beta+\alpha$

בעצם נשאל האם $\beta+\sup_{\gamma\in\alpha}\gamma = \sup_{\gamma\in\alpha}(\beta+\gamma)$

זה נכון! (היינו אמורים לראות בהרצאה)

(3) $f: \alpha \to \alpha+\beta$ מונו' ורציפה?

לא! למשל עבור $\beta=1$, שכבר ראינו.

קופינליות

הגדרה: יהיה סודר α.

נגדיר $cof(\alpha)$ להיות הסודר המינימאלי כך שיש $f: \beta \to \alpha$ (ב-β המינימאלי) קופינאלית.

אשר פונקציה היא קופינאלית אם התמונה קופינאלית.

[לכן מקבלים $\{\beta \,/\, f: \beta \to \alpha \text{ קופינאלית}\} \neq \emptyset$, כי α בקבוצה].

תרגיל: $cof(\alpha) \leq \alpha$

פתרון: α בקבוצה ש-$cof(\alpha)$ המינימום שלה..

תרגיל: הוכח שיש פונקציה $f: cof\,\alpha \to \alpha$ קופינאלית ושומרת סדר.

פתרון: יש $f: cof(\alpha) \to \alpha$ מהגדרה. נבנה $g: \beta \to \alpha$ [$\beta = cof(\alpha)$ לנוחות] קופינאלית ושומרת סדר.

ונבנה את g בצורה הבאה:

$$\forall \gamma < \beta: \quad g(\gamma) = \max\{f(\gamma),\ \sup\{g(\delta)+1 \,/\, \delta<\gamma\}\}$$

השאלה היחידה היא באם ה-sup תמיד יהיה בתוך α.

(שימו לב!) מהגדרת β, היא המינימאלית כך שיש פונקציה קופינאלית מ-β ל-α

ולכן אם $\gamma<\beta$ אז כל פונקציה מ-γ ל-α חסומה!

לכן $g(\delta)+1$ לכל $\delta<\gamma$ חסומה! ולכן ה-sup של g תמיד נמצא ב-α.

קופינאליות: לכל γ, $g(\gamma) \geq f(\gamma)$.

f קופינאלית לכן לכל $\varepsilon<\alpha$ יש $\gamma<\beta$ כך ש-$f(\gamma) \geq \varepsilon$ ולכן $g(\gamma) \geq \varepsilon$ סה"כ g קופינאלית.

שומרת סדר: רוצים להראות שאם $\delta<\gamma$ אז $g(\gamma) > g(\delta)$.

אבל $g(\gamma) \geq \sup(g(\delta)+1 \,/\, \delta<\gamma)$ בפרט $g(\gamma) \geq g(\delta)+1$ לכל $\delta<\gamma$, לכן לכל $\delta<\gamma$ $g(\gamma) > g(\delta)$.

מ.ש.ל!

<u>תרגיל:</u> הוכח שהבאים שקולים.

א. α עוקב. ב. $\mathrm{cof}(\alpha)=1$

ג. $\mathrm{cof}(\alpha)<\omega$ ד. $\mathrm{cof}(\alpha)$ עוקב.

<u>פתרון:</u> (א $\Rightarrow$ ב)

אפשר להגדיר פונקציה מ-1 לתוך האיבר האחרון ב-α.

(ב $\Rightarrow$ ג) ברור!

(ג $\Rightarrow$ ד)

כל איבר קטן מ-ω הוא טבעי ולכן עוקב או 0.

0 לא יכול להיות $\mathrm{cof}(\alpha)$! ולכן עוקב!

(ד $\Rightarrow$ א)

יש פונקציה שומרת סדר וקופינאלית $f:\mathrm{cof}(\alpha)\to\alpha$.

$\mathrm{cof}(\alpha)$ עוקב ולכן יש בו איבר אחרון. נסתכל לאן הוא הולך.

נסמנו ב-β. מסתכלים על $f(\beta)$.

אם $f(\beta)$ לא אחרון ב-α אז יש $\alpha\ni\gamma>f(\beta)$.

בגלל קופינאליות f קיים $\delta<\mathrm{cof}(\alpha)$ כך ש- $\gamma\le f(\delta)$.

אבל f שומרת סדר $\Rightarrow$ $f(\delta)\le f(\beta)$ מבחירת β.

מכאן סתירה לקיום γ כנ"ל. לכן $f(\beta)$ אחרון ב-α!

מכאן α עוקב! <u>מ.ש.ל</u>!

<u>טענה:</u> יהיו α,β סודרים גבוליים, כך שיש $f:\beta\to\alpha$ <u>שומרת סדר וקופינאלית</u>. אז $\mathrm{cof}\,\alpha=\mathrm{cof}\,\beta$.

<u>תרגיל:</u> הוכח $\mathrm{cof}(\mathrm{cof}(\alpha))=\mathrm{cof}(\alpha)$

<u>פתרון:</u> α עוקב $\Leftrightarrow$ $\mathrm{cof}(\alpha)=1$ $\Rightarrow$ $\mathrm{cof}(1)=1$ $\Rightarrow$ שוויון!

α גבולי $\Leftrightarrow$ $\mathrm{cof}(\alpha)$ גבולי, לכן מהטענה

~~[illegible]~~ וידוע שיש $f:\mathrm{cof}\,\alpha\to\alpha$ שומרת סדר וקופינאלית

לכן $\mathrm{cof}(\mathrm{cof}(\alpha))=\mathrm{cof}(\alpha)$.

<u>מ.ש.ל</u>!