פתרון לתרגיל 2

17 בנובמבר 2015

שאלה 1

א) ראשית נוכי את אי שוויון הימני: $\left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | x_i || x_j | = \sum_{i=1}^{n} | x_i |^2 + 2\sum | x_i || x_j | \geq \sum_{i=1}^{n} | x_i |^2$ לכן $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \sum_{i=1}^{n} | x_i |$ שזה בדיוק אי שוויון הימני.

ב) בשביל להוכיח את אי שוויון השמאלי נגדיר: $x = (| x_1 |, | x_2 |, \ldots, | x_n |)$,

$y = (1, 1 \ldots, 1)$ לפי אי שוויון קושי שוורץ $| xy | \leq \|x\| \|y\|$.

נשים לב : $| xy | = \sum_{i=1}^{n} | x_i |$

$\|x\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{n} x_i^2}$ $\|y\| = \sqrt{n}$ ולכן מתקבל $\frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i|}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

שאלה 2

א) כאשר נשים לב כי מאחר ו־$d(x,y) > 0$ מתקיים גם כי $min\{1, d(x,y)\} \geq 0$ ולכן $\alpha(x,y)$ היא פונקציה חיובית. כעת נבדוק את שאר התכונות:

i) קל לראות שהמרחק בין xל־y הוא 0 $\Leftrightarrow$ הם שווים.

$\alpha(x,y) = 0 \Leftrightarrow min\{1, d(x,y)\} = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii) סימטריות: היות ו־$d(x,y) = d(y,x)$ ברור

ש־$\alpha(x,y) = min\{1, d(x,y)\} = min\{1, d(x,y)\} = \alpha(y,x)$

iii) אי שוויון המשולש:

רוצים להוכיח:

$\alpha(x,y) = min\{1, d(x,y)\} \leq min\{1, d(x,z)\} + min\{1, d(z,y)\} = \alpha(x,z) + \alpha(x,y)$.

מחלק את ההוכחה למקרים:

א) נניח ש־$1 \leq d(x,y)$ (כלומר $\alpha(x,y) = 1$) ו־$1 \leq d(z,x)$ או $1 \leq d(z,y)$. נקבל ש־$\alpha(x,z) = 1$ או $\alpha(z,y) = 1$ ולכן בכל מקרה: $\alpha(x,y) = 1 \leq \alpha(x,y) + \alpha(y,z)$.

ב) נניח נניח ש־$1 \geq d(x,y)$ (כלומר $\alpha(x,y)$) אבל $d(x,z) < 1$ וגם $d(z,y) < 1$ אז $\alpha(x,y) = 1 \leq d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) = \alpha(x,z) + \alpha(z,y)$

ג) נניח ש־$d(x,y) < 1$ (כלומר $\alpha(x,y) = d(x,y)$) ו־$1 \leq d(x,z)$ או $1 \leq d(z,y)$ נקבל ש־$\alpha(x,y) = 1$ או $\alpha(y,z) = 1$ ולכן בכל מקרה:

$\alpha(x,y) = d(x,y) < 1 \leq \alpha(x,y) + \alpha(y,z)$

ד) נניח ש־$d(x,y) < 1$ (כלומר $\alpha(x,y) = d(x,y)$) אבל $d(y,z) < 1$ וגם $d(x,z) < 1$ אז $\alpha(x,y) = d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) = \alpha(x,z) + \alpha(z,y)$

בכל מקרה אי שוויון המשולש מתקיים.

ב) ראשית נשים לב ש־$d(x,y)\geq 0 \Leftarrow 1+d(x,y)>0$ ולכן $\beta(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ גם מוגדרת היטב וגם חיובית. כעת נוכיח את התכונות:

i) שווה 0 אך ורק על איברים שווים: $\beta(x,y)=0 \Leftrightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}=0 \Leftrightarrow d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

ii) סימטריות: היות ו־$d(x,y)=d(y,z)$ ברור ש־ $\beta(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}=\frac{d(y,x)}{1+d(y,x)}=\beta(y,x)$

iii) אי שוויון המשולש: רוצים להוכיח ש־$\beta(x,y)\leq\beta(x,z)+\beta(z,y)$ כלומר $\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\leq\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)}+\frac{d(z,y)}{1+d(z,y)}$ אם נעבוד קצת נקבל

$$d(x,y)(1+d(x,z))(1+d(z,y))\leq d(x,z)(1+d(x,y))(1+d(z,y))+d(z,y)(1+d(x,y)))(1+d(x,z))$$

$$d(x,y)(1+d(x,z)+d(z,y)+d(x,z)d(z,y))\leq d(x,z)(1+d(x,y)+d(z,y)+d(x,y)d(z,y)+d(z,y))$$

$$+d(z,y)(1+d(x,y)+d(x,z)+d(x,y)d(x,z))$$

$$d(x,y)+d(x,y)d(x,z)+d(x,y)d(z,y)+d(x,y)d(x,z)d(z,y)\leq$$

$$\leq d(x,z)+d(x,z)d(x,y)+d(x,z)d(z,y)+d(x,z)d(x,y)d(z,y)+$$

$$+d(z,y)+d(z,y)d(x,y)+d(z,y)d(x,z)+d(z,y)d(x,y)d(z,x)$$

וכאן אפשר לצמצם כמה דברים ולקבל :
$d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)+2d(z,y)d(x,y)+d(x,z)d(x,y)d(z,y)$ שזה כמובן נכון כי $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ לכן אי שוויון המשולש מתקיים.

שאלה 3

תהי A קבוצה, לפי ההגדרה של הפנים של A $int(A)$ קבוצה פתוחה וגם $Cl(A)$ (הסגור של A) זו קבוצה סגורה המינימלית שמכילה את A ובפרט סגורה . מתקיים:
$Cl(A)=int(A)\cup\partial A$ כאשר ∂A היא שפה של A אזי $(Cl(A))^c$ קבוצה פתוחה, אבל $\partial A=\mathbb{R}^n\setminus(int(A)\cup(Cl(A)))$ זו $int(A)\cup(Cl(A)^c)$ קבוצה פתוחה כאיחוד של שתי פתוחות ולכן ∂A היא סגורה כי המשלים שלה פתוחה. נוכיח ש־∂A היא סגורה ולא פתוחה: נניח בשלילה שהיא גם סגורה וגם פתוחה אזי $\mathbb{R}^n=(int(A)\cup Cl(A)^c)\cup\partial A$ קיבלנו ש־$\mathbb{R}^n$ היא איחוד של שתי קבוצות פתוחות לא ריקות שזרות זו לזו בסתירה לכך ש־$\mathbb{R}^n$ הוא מרחב קשיר.

שאלה 4

נזכור כי $x \in Lim\left(A\right)$ אם לכל $r > 0$ קיים $A \ni a \neq x$ כך ש־$a \in B\left(x,r\right)$.

א) הפרכה: נניח ת,ת

$$A = \left\{ \left(\frac{1}{n},0\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}, B = \left\{ \left(-\frac{1}{n},0\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

אז

$$Lim\left(A\right) = Lim\left(B\right) = \left\{\left(0,0\right)\right\}$$

אבל

$$Lim\left(A \cap B\right) = Lim\emptyset = \emptyset$$

ב) הוכחה:נניח ש־$x \in LimA \cup LimB$, ונוכיח כי $x \in LimA$ (בדומה מוכיחים $x \in LimB$). יהי $r > 0$, קיים $A \cap B \subseteq A \ni a \neq x$ כך ש $a \in B\left(x,r\right)$ ולכן ברור ש $x \in LimA$.

ג) הוכחה:

i) צד $\subseteq$: נניח ש $x \in Lim\left(A\right) \cup Lim\left(B\right)$, בלי הגבלת הכלליות $x \in Lim\left(A\right)$. לכל $r > 0$ קיים $A \cup B \supseteq A \ni a \neq x$ כך $a \in B\left(x,r\right)$. לכן $x \in Lim\left(A \cup B\right)$.

ii) צד $\supseteq$: נניח ש $x \in Lim\left(A \cup B\right)$. נניח בשלילה כי $x \notin LimB$ ו־$x \notin LimA$, קיים $r_B > 0$, כך שלכל $B \ni a \neq x$ מתקיים כי $a \notin B\left(x,r_B\right)$. באופן דומה קיים $r_A > 0$, כך שלכל $A \ni a \neq x$מתקיים כי $a \notin B\left(x,r_A\right)$. ניקח $r = min\left\{r_A, r_B\right\}$. היות ו־$x \in Lim\left(A \cup B\right)$, קיים $A \cup B \ni a \neq x$ כך ש־$a \in B\left(x,r\right)$. בלי הגבלת הכלליות נניח כי $a \in A$. אז $a \in B\left(x,r\right) \subseteq B\left(x,r_A\right)$ בסתירה לכך ש־$a \notin B\left(x,r_A\right)$.

ד) הפרכה: נבחר $A_n = \left(\frac{1}{n},0\right)$ אז $Lim \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \left(0,0\right)$ אבל $LimA_n = \emptyset$ ולכן, $\bigcup_{n=1}^{\infty} LimA_n = \emptyset$.

שאלה 5

נראה כי $\left(LimA\right)^c$ היא קבוצה פתוחה. נניח $x \in \left(LimA\right)^c$, נראה כי x נקודה פנימית. היות ו x אינה נקודת גבול של A, קיים $r > 0$ כך ש $B\left(x,r\right) \setminus \left\{x\right\}$ אינו מכיל נקודות מ A. נראה כי $B\left(x,r\right) \subseteq \left(LimA\right)^c$ ולכן x היא נקודה פנימית. נניח בשלילה כי קיים $l \in LimA \cap B\left(x,r\right)$. נשים לב ש $l \neq x$ כי x היא לא נקודת גבול. בגלל ש $B\left(x,r\right)$ קבוצב פתוחה, קיים $r' > 0$ כך ש $B\left(l,r'\right) \subseteq B\left(x,r\right)$. נבחר $0 < r'' < min\left\{r', \|l-x\|\right\}$ (קיים r'' כנ"ל כי $x \neq l$). לכן $x \notin B\left(l,r''\right) \subseteq B\left(x,r\right)$ בגלל ש l נקודת גבול, קיים $a \in A$ כך ש $a \in B\left(l,r''\right) \subseteq B\left(x,r\right)$. לכן $a \in B\left(x,r\right)$ ו $a \neq x$ (כי $x \notin B\left(x,r''\right)$) . זאת בסתירה להגדרת r ($B\left(x,r\right) \setminus \left\{x\right\}$ אינו מכיל נקודות מ־A).

שאלה 6

א) א$\Leftarrow$ג : נבחר $M = 2r$. אם $x,y \in A$ אז בגלל ש $x,y \in B\left(x_0,r\right)$ נקבל כי $d\left(x,y\right) \leq d\left(x,x_0\right) + d\left(x_0,y\right) < r + r = 2r = M$ שזה מה שדרוש.

ב) ג $\Leftarrow$ ב : יהי $x_0 \in X$ כלשהוא. נבחר $a \in A$ כלשהוא ונגדיר $d(a, x_0) = d$ ו $r = d + M$. כאת, לכל $x \in A$ מתקיים

$$d(x, x_0) \leq d(x, a) + d(a, x_0) \leq M + d = r$$

לכן $x \in B(x_0, r)$ כנדרש.

ג) ב $\Leftarrow$ א : מיידי. אם הטענה נכונה לכל $x_0 \in X$ אזי קיים $x_0 \in X$ עבורו הטענה נכונה.

שאלה 7

א) i) הקבוצה היא פתוחה.

הוכחה: לכל $(x,y) \in A$ נבחר $r = \frac{1}{2}min\{|x|, |y|\}$ ואז $B((x,y), r) \subseteq A$ מפני שאם $(a,b) \in B((x,y), r)$ אז $|a-x| < \sqrt{|a-x|^2 + |b-y|^2} < r \leq \frac{1}{2}|x|$ ולכן $a > x - \frac{1}{2} = |x| - \frac{1}{2}|x| = \frac{1}{2}|x| > 0$

באופן דומה $|b-y| < \frac{1}{2}y$ ולכן $b < y + \frac{1}{2}|y| = -|y| + \frac{1}{2}|y| = -\frac{1}{2}|y| < 0$ לכל $(a,b) \in A$.

ii) טענה: הקבוצה אינה סגורה.

הוכחה: המשלים מכיל את $(0,0)$ ולכל $r > 0$ הכדור $B((0,0), r)$ מכיל את הנקודה $\left(\frac{r}{2}, -\frac{r}{2}\right)$ שאינה נמצאת ב־A^c. לכן $(0,0)$ אינה נקודה פנימית של A^c ולכן A אינה קבוצה סגורה.

ב) i) טענה: הקבוצה פתוחה.

הוכחה: לכל $x \in (0,1)$ נבחר $r = \frac{1}{2}min\{x, 1-x\}$ אז לכל $y \in B(x,r)$ מתקיים $|y-x| < r$ ולכן $y < x + r < x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x < 1$ מצד שני $y > x - r > x - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x > 0$ ולכן $B(x,r) \subseteq (0,1)$.

לכן A קבוצה פתוחה.

ii) טענה: הקבוצה אינה סגורה.

הוכחה: נראה כי A^c אינה פתוחה. נביט על $0 \in A^c$. לכל $r > 0$ נבחר $r' = min\{r, 1\}$ ואז $\frac{r'}{2} \in B(0,r) \cap A$ ולכן 0 אינה נקודה פנימיצ של $A^c \Leftarrow A$ אינה סגורה.

ג) ברור ש־$\mathbb{R}^3$ קבוצה פתוחה, כי סביב כל $x \in \mathbb{R}^3$ תמיד קיים $r > 0$ כך ש־$B(x,r) \subseteq \mathbb{R}^3$ אחרת הינו מקבלים ש־x היא נקודה מבודדת בסתירה לכך ש־$\mathbb{R}^3$ מרחב קשיר (ראינו את זה בתרגול)

נבדור האם היא גם סגורה: נניח שלא, אזי נקבל ש־$\left(\mathbb{R}^3\right)^c$ סגורה ולא פתוחה $\Leftarrow$ מכילה את כל נקודות הגבול שלה, אבל אין בקבוצה ריקה אף נקודה $\Leftarrow$ $\emptyset$ לא סגורה. סתירה. קיבלנו ש־$\mathbb{R}^3$ היא גם סגורה וגם פתוחה.

שאלה 8

א) (כיוון $\Leftarrow$) נניח שקיימת $\{x_n\} \subseteq A$ סדרה עם איברים שונים המתכנסת ל־x. אזי לכל היותר רק איבר אחד של $\{x_n\}$ הוא x. אם נזרוק אותו מהסדרה המקורית (מהנחה שבכלל נמצא בסדרה המקורית) נקבל תת סדרה של סדרה מקורית (שהפעם נמצאת כולה ב־$A \setminus x$) המתכנסת ל־x. לכן x היא נקודת הצטברות של A.

(כיוון $\Rightarrow$) נניח ש־x היא נקודת הצטברות של A אזי קיימת $\{x_n\} \subseteq A \setminus \{x\}$ הנתכנסת ל־x. נראה שקיימת תת סדרה $\{x_{n_k}\}$שכל איבריה שונים וכמובן גם תתכנס ל־x. נגדיר

$n_2 = min\left\{x|n>1 \wedge x_n \neq x_1\right\}$. ברור שהמינמום קיים כי מדובר בקבוצה לא ריקה של טבעיים (הקבוצה לא ריקה כי אחרת נקבל שכל איברי הסדרה המקורית שווים ל־x_1 ומצד שני הסדרה מתכנסת ל־$x \neq x_1$). נגדיר $n_3 = min\left\{n|n>n_2 \wedge x_n \notin \left\{x_{n_1}, x_{n_2}\right\}\right\}$ גם n_3 מוגדר היטב כי הקבוצה אינה ריקה. אחרת החל ממקום מסויים כל האיברים הם x_{n_1}או x_{n_2} ואז לסדרה מקורית קיימת בהכרח תת סדרה קבועה שכל איבריה הם x_{n_1} או שקיימת לה תת סדרה שכל איבריה בם x_{n_2} ובכל מקרה תת סדרה זו לא תוכל להתכנס ל־x. בסתירה לכך שהסדרה המקורית מתכנסת ל־x.

כך באופן איבדוקטיבי נגדיר $n_{k+1} = min\left\{n|n>n_k \wedge x_n \notin \left\{x_{n_1}, \dots x_{n_k}\right\}\right\}$ בדומה לנימוק הקודם הקבוצה אינה ריקה והמינימום מוגדר היטב לכל k. ברור גם שזו סדרה עולה של אינדקסים ולכן בנינו באמת תת סדרה עם איברים שונים הנתכנסת ל־x.

ב) (כיוון $\Rightarrow$) : נבנה סדרה $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A \setminus \left\{x\right\}$ המתכנסת ל־x. ע"פ ההנחה נקבל שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $x \neq x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right)$. ברור ש־$\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל־x.

(כיוון $\Leftarrow$) : ע"פ סעיף א' קיימת סדרה $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$. סדרה עם איברים שונים המתכנסת ל־x ולכן לכל $r > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ $x_n \in B(x,r)$. מכאן $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subseteq B\left(x,r\right) \cap A$ תת קבוצה אינסופית וקיבלנו את הדרוש.