תרגול 6

תת מרחבים אינוריאנטים

הגדרה

יהי $T:V\to V$ אופרטור, תת מרחב $U\subset V$ ייקרא אינווריאנטי (תחת T) אם לכל $u\in U$ מתקיים $T(u)\in U$.

דוגמא

יהי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ העתקה ליניארית המוגדרת ע"י $T(x,y,z)=(x+y,y+z,0)$.

המרחב וקטורי $U=\{(a,b,0)|a,b\in\mathbb{R}\}$ הוא אינווריאנטי (תחת T) מכיוון ש $T(a,b,0)=(a+b,b,0)\in U$.

הגדרה

יהיו $T:V\to V$ אופרטור, $U\subset V$ תת מרחב אינווריאנטי, ו E בסיס של U. אזי $T|_u:U\to U$ אופרטור וניתן להציג אותו כמטריצה $\left[T|_U\right]_E$.

דוגמא

נתבונן בדוגמא הקודמת $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ מוגדר ע"י $T(x,y,z)=(x+y,y+z,0)$.

$U=\{(a,b,0)|a,b\in\mathbb{R}\}$ והבסיס הוא $E=\{(1,0,0),(0,1,0)\}$.

כעת נציג את המטריצה $\left[T|_U\right]_E$.

$$T|_u(1,0,0)=1\cdot(1,0,0)+0\cdot(0,1,0)$$

$$T|_u(0,1,0)=(1,1,0)=1\cdot(1,0,0)+1\cdot(0,1,0)$$

ולכן המטריצה המתאימה היא $\left[T|_U\right]_E=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

הערה

עבור אופרטור $T:V\to V$ אם E קבוצה בת"ל כך ש $SpanE$ תת מרחב אינווריאנטי אז ניתן לקבל את המטריצה $\left[T|_{spanE}\right]_E$.

דוגמא

יהי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ העתקה ליניארית המוגדרת ע"י $T(x,y,z)=(x+y,x+y,z)$.

הקבוצה $E=\{(1,1,0),(0,0,1)\}$ בת"ל כך ש $SpanE$ אינווריאנטי תחת T.

כעת נציג את המטריצה $\left[T|_{spanE}\right]_E$:

$$T|_{SpanE}(1,1,0)=2\cdot(1,1,0)+0\cdot(0,0,1)$$

$$T|_{SpanE}(0,0,1)=0\cdot(1,1,0)+1\cdot(0,0,1)$$

$$\left[T|_{spanE}\right]_E=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$$

<u>למה</u>

יהי $T:V\rightarrow V$ אופרטור.

1. יהי $V=U_1\oplus U_2\oplus...\oplus U_K$ סכום ישר של מרחבים אינווריאנטים, ולכל $i=1,...,k$, יהי B_i בסיס של U_i. נסמן $B=B_1\cup B_2\cup...\cup B_k$. אזי

$$[T]_B=\begin{pmatrix} [T]_{B_1} & O & \cdots & O \\ O & [T]_{B_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \cdots & O & [T]_{B_k} \end{pmatrix}.$$

2. מצד שני, אם

$$[T]_B=\begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \cdots & O & A_k \end{pmatrix}.$$

מטריצה אלכסונית-בלוקים, אז יש חלוקה של B לאיחוד זר, $B=B_1\cup B_2\cup...\cup B_k$, כך שלכל $i=1,...,k$, התת מרחב $U_i=SpanB_i$ הוא אינווריאנטי, ו $[T]_{B_i}=A_i$.

<u>דוגמא</u>

בעזרת החלק השני של הלמה נבנה דוגמא לחלק הראשון של הלמה

ניקח את B להיות הבסיס הסטנדרטי ואז

$$[T]_B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

נגדיר את ההעתקה הליניארית $T:\mathbb{R}^5\rightarrow\mathbb{R}^5$ ע"י

$$T(x,y,z,t,w)=(x+z,x+2y-z,x+2y-2z,t+2w,3t+4w)$$

כעת $B_1=\{(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0)\},B_2=\{(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\}$

נשים לב שהתת מרחבים $U_1=SpanB_1,U_2=SpanB_2$ הם אינווריאנטים ואז כדי לקבל חזרה את $[T]_B$

נבנה את $[T]_{B_1}$ ונקבל ש $[T]_{B_1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ ו $[T]_{B_2}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ונקבל את מטריצת הבלוקים הדרושה $\begin{pmatrix} [T]_{B_1} & 0 \\ 0 & [T]_{B_2} \end{pmatrix}$.

נשים לב שאם נשנה את סדר האיברים בבסיס נקבל את מטריצת הבלוקים $\begin{pmatrix} [T]_{B_2} & 0 \\ 0 & [T]_{B_1} \end{pmatrix}$.

<u>מרחבים עצמיים מוכללים</u>

<u>הגדרה</u>

יהי V מרחב וקטורי כך ש $\dim V = n$ לכל ערך עצמי λ של T, נגדיר את המרחב העצמי המוכלל $K_\lambda = K_\lambda(T) = \ker(T-\lambda I)^n = \left\{v\in V : (T-\lambda I)^n v = \vec{0}\right\}$.

<u>דוגמא</u>

עבור המטריצה $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ נקבל שהפולינום האופייני הוא $(\lambda-4)(\lambda+2)^2$ ולכן הערכים העצמיים הם $-2, 4$.

נמצא את המרחב העצמי המוכלל עבור הערך העצמי $\lambda = 4$.

$$\begin{pmatrix} -7 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 48 & -12 & 12 \\ 48 & -12 & 12 \\ 36 & -36 & 36 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -324 & 108 & -108 \\ -324 & 108 & -108 \\ -216 & 216 & -216 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מרחב האפס הוא

$span\left\{(0,1,1)\right\}$

באותו אופן ניתן למצוא את המרחב העצמי עבור הערך העצמי $\lambda = -2$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -36 & 36 & 0 \\ -36 & 36 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -216 & 216 & 0 \\ -216 & 216 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

מרחב האפס הוא

$span\left\{(1,1,0),(1,1,1)\right\}$

<u>הגדרה</u>

קבוצה מהצורה $E = \left\{T^{m-1}v,\dots,T^2v,Tv,v\right\}$ כאשר $T^{m-1}v \neq 0$ ו $T^m v = 0$, תיקרא מסלול מאורך m.

<u>הערה</u>

הוכחתם בהרצאה שכל מסלול היא קבוצה בת"ל.

<u>דוגמא</u>

ניקח מהדוגמא הקודמת את המטריצה

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

והווקטור $(1,1,1)$

ואז $E = \left\{(-1,-1,0),(1,1,1)\right\}$ הוא המסלול המתאים.

<u>טענה</u>

$K_\lambda = \left\{v\in V : \exists k, (T-\lambda I)^k v = 0\right\}$ ובנוסף K_λ אינוריאנטי תחת T.

משפט

נניח שהפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים ליניאריים מעל השדה. יהיו $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k$ הערכים העצמיים השונים של T. אזי $V=K_{\lambda_1}\oplus K_{\lambda_2}\oplus...\oplus K_{\lambda_k}$ פירוק של V לסכום ישר של תת מרחבים אינוריאנטים.

דוגמא

עבור המטריצה מהדוגמא הקודמת $\begin{pmatrix}-3 & 1 & -1\\ -7 & 5 & -1\\ -6 & 6 & -2\end{pmatrix}$ הפולינום האופייני מתפרק לגורמים ליניאריים $(\lambda+2)^2(\lambda-4)$.

ראינו ש $K_4=span\{(0,1,1)\}$ ו $K_{-2}=span\{(-1,-1,0),(1,1,1)\}$.

נראה ש $K_4=span\{(0,1,1)\}$ תת מרחב אינוריאנטי

$$\begin{pmatrix}-3 & 1 & -1\\ -7 & 5 & -1\\ -6 & 6 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}\in K_4$$ ואז $[T]_{k_4}=4$

נראה ש $K_{-2}=span\{(-1,-1,0),(1,1,1)\}$ תת מרחב אינוריאנטי

$$\begin{pmatrix}-3 & 1 & -1\\ -7 & 5 & -1\\ -6 & 6 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\in K_{-2},$$

$$\begin{pmatrix}-3 & 1 & -1\\ -7 & 5 & -1\\ -6 & 6 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-3\\-2\end{pmatrix}=-1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\in K_{-2}$$

ואז $[T]_{k_{-2}}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$

ואז אם $B=\{(-1,-1,0),(1,1,1),(0,1,1)\}$ אז

$$[T]_B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$