

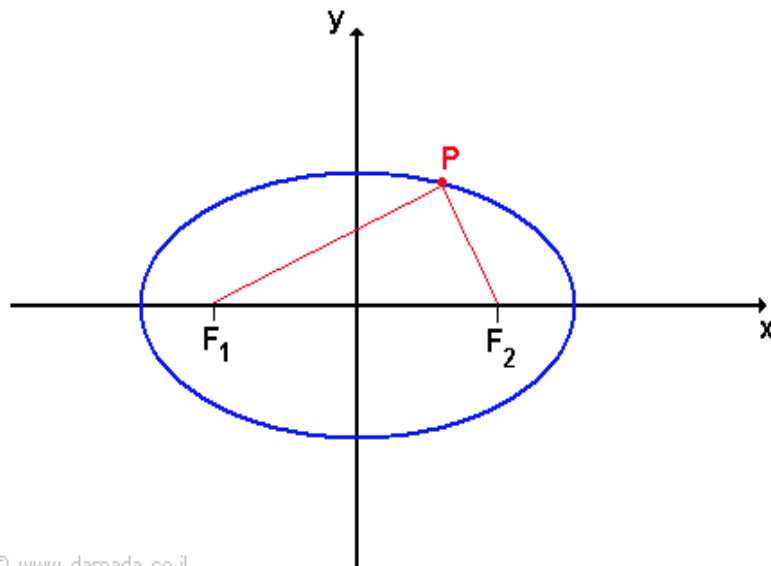
הנדסה אנליטית

האליפסה

הנדסה אנליטית - האליפסה

מעגל הוא אוסף של הנקודות הנמצאות במרחק שווה מנקודה אחת, נקודת מרכז המעגל.

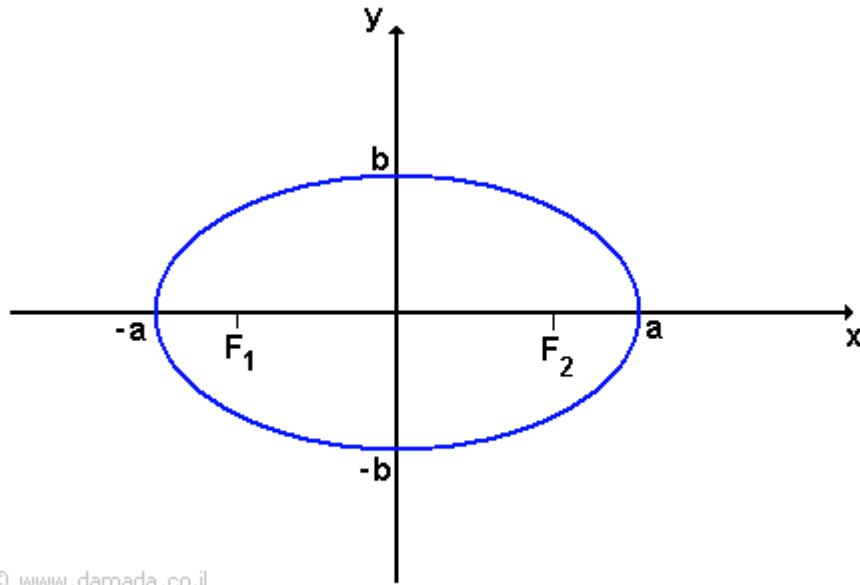
אליפסה, לעומת זאת, היא אוסף של הנקודות הנמצאות בסכום מרחקים שווה משתי נקודות. שתי נקודות אלו הם המוקדים של האליפסה. כל מוקד (focus) האליפסה נהוג לסמן בעזרת האות F או f .



© www.damada.co.il

איור של אליפסה עם שני מוקדים ונקודה P על היקפה

באליפסה יש ציר ראשי וציר משני. הציר הראשי עובר דרך שני מרכזי האליפסה בקו ישר. את אורכו של הציר הראשי נסמן מטעמי נוחות כפעמיים הגודל, a , כלומר $2a$ הציר המשני הוא אנכי לציר הראשי וגם חוצה אותו. את אורכו של הציר המשני נסמן מטעמי נוחות כפעמיים הגודל, b , כלומר $2b$.



© www.damada.co.il

איור של אליפסה שלעיל עם שני הצירים

כעת נציג שני משפטים הקשורים לאליפסה. המשפטים מתייחסים לאליפסה שמרכזה מונח על ראשית הצירים.

● משוואת ישר המשיק בנקודה $P_1 = (x_1, y_1)$ שעל אליפסה שמרכזה בראשית הוא,

$$(b^2x_1)x + (a^2y_1)y = a^2b^2$$

● הישר $y = mx + n$ משיק לאליפסה שמרכזה בראשית אם מתקיים,

$$n^2 = a^2m^2 + b^2$$

תרגיל הקדמה:

מצא את משווא האליפסה הקנונית המקיימת:

- א. אורך הציר בגדול הוא 10, והיא עוברת דרך הנקודה (3.16)
- ב. המרחק בין המוקדים הוא 4, והיא עוברת בנק' (2.5/3).

תרגיל 2:

אליפסה קנונית שמוקדיה F1, F2 חותכת את ציר Y בנקודות A ו B, חשבו את שטח המרובע AF1BF2 אם ידוע כי משוואת האליפסה היא $5x^2 + 9y^2 = 45$

תרגיל 3

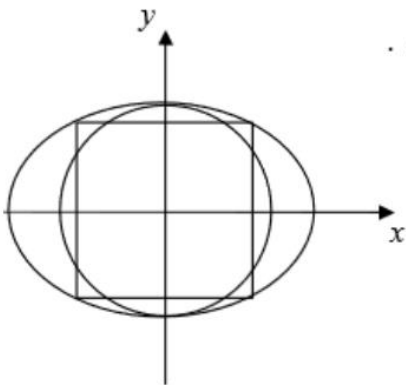
הראה כי הישר $y=x+5$ אינו חותך את האליפסה $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ומצא את משוואת המשיקים לאליפסה המקבילים לישר הנתון.
מצא גם את המרחק בין הישר הנתון למשיק הקרוב ביותר.

שאלה 1

קיץ 2010 מועד ב' (בגרות במתמטיקה 5 יחידות)

נתונה המשוואה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 - 16} = 1$, $a > 0$, $a \neq 4$.

- א. עבור אילו ערכים של a מייצגת המשוואה:
(1) אליפסה?
(2) מעגל?



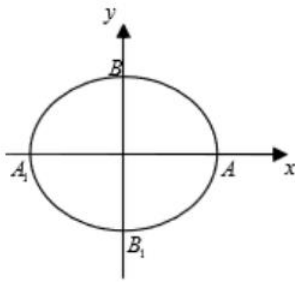
- ב. ידוע כי המשוואה הנתונה מייצגת אליפסה. באליפסה חסומים: עיגול הנוגע באליפסה בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה-y, וריבוע שצלעותיו מקבילות לצירים (ראה ציור) היחס בין שטח העיגול החסום לבין שטח הריבוע החסום הוא $\frac{4\pi}{9}$. מצא את הערך של a^2 .

הערה: פיתרון סעיף ב' אינו תלוי בפיתרון סעיף א'.

פתרון: א(1). $0 < a < 4$, $a \neq \sqrt{8}$. א(2). $\sqrt{8}$. ב. 9

שאלה 2

חורף 2013 (בגרות במתמטיקה 5 יחידות)



נתונה האליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$ (ראה ציור).

F_1 ו- F_2 הם מוקדי האליפסה וקודקודיה הם A, A_1, B, B_1 .
נתון כי המוקד F_1 הוא אמצע הקטע AF_2 .

דרך מרכז האליפסה ושניים מקודקודיה העבירו מעגל.
נתון כי קוטר המעגל הוא $\sqrt{17}$.

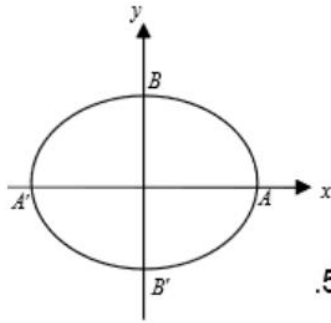
א. מצא את משוואת האליפסה

ב. העבירו עוד שלושה מעגלים אחרים דרך מרכז האליפסה ושניים מקודקודיה.
המרכזים של ארבעת המעגלים הם קודקודים של מרובע.

המרובע, הנמצא במישור $[x, y]$, הוא בסיס של פירמידה שקודקודה $S(0, 3, 4)$.
מצא את נפח הפירמידה.

פתרון: א. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ ב. $8\sqrt{2}$ סמ"ק

שאלה 3



חורף 2012 (בגרות במתמטיקה 5 יחידות)

האליפסה $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ חותכת את ציר ה- x

בנקודות A ו-A', ואת ציר ה- y היא חותכת בנקודות B ו-B', כמתואר בציור.

א. נתון כי הישר $y = -\frac{5}{4}x$ מאונך לישר A'B,

והמרחק בין הנקודה B לאחד המוקדים של האליפסה הוא 5.
מצא את משוואת האליפסה

ב. F_1 ו- F_2 הם המוקדים של האליפסה, E היא נקודה על האליפסה. מצא את ההיקף של המשולש EF_1F_2 .

ג. מקרבים את מוקדי האליפסה זה לזה לאורך ציר ה- x. נוצרת אליפסה קנונית חדשה העוברת גם היא דרך הנקודות A ו-A', ומוקדיה הם F_1' ו- F_2' .

E' היא נקודה על האליפסה החדשה כך ש- EE' מקביל לציר ה- y. הגובה לצלע $F_1'F_2'$ במשולש $E'F_1'F_2'$ גדול פי k ($k > 1$) מהגובה לצלע F_1F_2 במשולש EF_1F_2 .

(1) הבע באמצעות k את משוואת האליפסה החדשה.

(2) עבור איזה ערך של k המוקדים F_1' ו- F_2' יתלכדו לנקודה אחת בראשית הצירים? נמק.

פתרון: א. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ב. 16 ג. (1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16k^2} = 1$ ג. (2) $k = \frac{5}{4}$