תרגול - המרחב הדואלי.

10 בפברואר 2013

1 מרחב דואלי - הגדרות וסימונים

הגדרה 1.1 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. העתקה לינארית $f : V \mapsto \mathbb{F}$ נקראת פונקציונל.

הגדרה 1.2 הגדרה: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. אוסף כל הפונקציונלים מ V נקרא מרחב דואלי של V ומסומן ב V^*.

סימון: יהי f פונקציונל. להמשך התרגול הנ"ל במקום לסמן $f\left(v\right)$ נסמן $[v,\, f]$.

דוגמאות:

1. $tr : F^{n\times n} \mapsto F$ הוא פונקציונל. (קל לבדוק שהעתקה היא לינארית)
2. $\phi : F^3 \mapsto F$ המוגדרת על ידי $\phi(x,y,z) = x+y+z$ היא פונקציונל לינארי.
3. $\det : F^{n\times n} \mapsto F$ אינה פונקציונל, כי דטרמיננטה אינה העתקה לינארית.

2 תכונות של מרחב דואלי כמרחב וקטורי

משפט 2.1 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס של V, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ סקלרים כלשהם ב $\mathbb{F}$, אזי קיים פונקציונל יחיד כך ש $[v_i,\, f] = \alpha_i$ לכל $1 \le i \le n$.

משפט 2.2 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס של V, אזי קיים בסיס יחיד של V^* שמוגדר על ידי $B^* = \{f_1, \ldots, f_n\}$ כך ש $[v_i,\, f_j] = \delta_{ij}$.

מסקנה 2.3 V^* הוא מרחב וקטורי n מימדי.. בנוסף, כל פונקציונל הוא בעל צורה $f(x_1v_1 + \ldots x_nv_{n)}) = \alpha_1x_1 + \ldots + \alpha_nx_n$

תרגיל: הוכח את המשפט הבא:

משפט 2.4 יהי V מרחב וקטורי n מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$. יהיו $u \neq v \in V$, אזי קיים פונקציונל לינארי $f \in V^*$ כך ש $[u,\, f] \neq [v,\, f]$. באופן שקול - לכל $0 \neq w \in V$ קיים $f \in V^*$ כך ש $[w,\, f] \neq 0$.

הוכחה: שקילות של הטענות נובעת אם ניקח $w=v-u$. לכן נוכיח את הטענה האחרונה בלבד. יהי $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ בסיס של V, $B=\{f_1,\ldots,f_n\}$ הבסיס הדואלי. אם $w=\sum_{i=1}^{n}a_iv_i$, אזי $[w,\,f_i]=a_i$ לכל i. לכן אם $[w,\,f]=0$ לכל f, בפרט $[w,\,f_i]=0$ לכל i, ולכן $a_i=0$ לכל i, בסתירה לכך ש $a_i\neq 0$. ■

תרגיל: יהי $V=\mathbb{R}^3$, $B=\{(1,0,3)\,,\,(0,2,2),\,(0,2,1)\}$ בסיס. מצא את הבסיס הדואלי.

פתרון: עלינו למצוא פונקציונלים $x(a,b,c)=ax_1+bx_2+cx_3$ כך ש $\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&2\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$y(a,b,c)=ay_1+by_2+cy_3$ כך ש $\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&2\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

$z(a,b,c)=az_1+bz_2+cz_3$ כך ש $\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&2\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

חישוב המטריצה ההופכית נותן לנו $\begin{pmatrix}1&-3&3\\0&-\frac{1}{2}&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3&3\\0&-\frac{1}{2}&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3&3\\0&-\frac{1}{2}&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3&3\\0&-\frac{1}{2}&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$$

תרגיל: יהי $V=\mathbb{R}_1\left[t\right]$. (פולינומים לינאריים). נגדיר פונקציונלים לינאריים $\phi_1\left(f(t)\right)=\int_0^1 f\left(t\right)dt$, $\phi_2\left(f(t)\right)=\int_0^2 f\left(t\right)dt$. (כלומר $\phi_1,\,\phi_2\in V^*$). מצא את הבסיס הדואלי ל $\{\phi_1,\,\phi_2\}$. נחשב את הפונקציות:

$\int_0^1\left(a+bt\right)dt=at+b\frac{t^2}{2}\mid_0^1=a+\frac{b}{2}$. $\int_0^2\left(a+bt\right)dt=at+b\frac{t^2}{2}\mid_0^2=2a+2b$. על מנת למצוא בסיס דואלי עלינו למצוא פונקציות a_i+b_it כך $\phi_j\left(a_i+b_it\right)=\delta_{ij}$. כלומר $\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

נחשב את המטריצה ההופכית ונקבל $\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}\\-2&2\end{pmatrix}$. לכן $\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}\\-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3 "הדואלי של הדואלי"

מכיוון ש V^* הוא מרחב וקטורי בזכות עצמו, אפשר לדבר על מרחב הדואלי ל V^*, $(V^*)^*$. לצורך הפשטוט, בהמשך נסמן אותו על ידי V^{**}. התיאור המילולי של איבר ב V^{**} הוא קצת מסורבל, זהו פונקציונל לינארי מקבוצת הפונקציונלים הלינאריים מ V. כאן נראה את היתרון של הסימון $[\Box]$. בעזרתו קל מאד לתאר את היחסים בין V ל V^{**}. הכל הופך להיות למשחק עם סימונים.
אם נביט בסימון $[v,\, f]$ עבור $f = f_0 \in V$ קבוע, לא קיבלנו יותר מדיי מידע חדש - זו היא פשוט דרך אחרת לרשום את הערך $f_0\left(v\right)$ של הפונקציה f_0 ב v. לעומת זאת אם נקבע $v = v_0 \in V$, נשים לב שהפונקציה $V^* \mapsto \mathbb{F}$ $[v_0,\, \Box]$, היא פונקציונל לינארי מ V^*, כלומר איבר ב V^{**}. פעולה הנ"ל נותנת לנו תאור של חלק מאיברי V^{**}. נשאלת שאלה - האם כל איבר ב V^{**}, הם מהצורה $[v,\, \Box]$? התשובה היא - לפעמים, ליתר דיוק כאשר V הוא מרחב וקטורי ממימד סופי. נוכיח את המשפט הבא:

משפט 3.1 יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה $\mathbb{F}$, אזי לכל $z \in V^{**}$ קיים $v \in V$, כך ש $z(f) = [v,\, f] = f\left(v\right)$ לכל $f \in V^*$. ההתאמה $z \rightleftarrows v$ היא איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים.

הוכחה: לכל וקטור $v \in V$ נתאים $z = [v,\, \Box]$. נשאיר לבדיקה עצמית שזו היא העתקה לינארית. נראה שהיא חח"ע ועל.

1. חח"ע: יהיו $v_1,\, v_2 \in V$, $z_1, z_2 \in V^{**}$ המוגדרים על ידי $z_i = [v_i,\, \Box]$. אזי $0 = z_1 - z_2 = [v_1 - v_2 \Box]$. לפי משפט 2.4 $v_1 - v_2 = 0$, ז"א העתקה היא חח"ע.
2. על: כאן אנחנו משתשמים בכך של V יש מימד סופי n. לפי המסקנה 2.3 אף $V*$ הוא n מימדי, שזה אומר שגם V^{**} הוא n מימדי. יש לנו העתקה לינארית חח"ע בין מרחבים וקטוריים מאותו מימד, וכפי שזכור מלינארית 1 העתקה כזו חייבת להיות על.

הערה 3.2 נשים לב, שיש כאן התאמה טבעית שמתאימה לכל וקטור ב V וקטור ב $V**$.
זה מאפשר לנו לזהות את V^{**} עם V
בנוסף - שימו לב שהטענה אינה נכונה עבור מרחבים וקטוריים ממימד אינסופי.

■

4 מאפס של קבוצה

הגדרה 4.1 יהי $S \subseteq V$. המאפס של S ב V^* הוא אוסף כל כל הפונקציונלים מ V כך ש $[s,\, f] = 0$ לכל $s \in S$. מאפס יסומן ב S^0.

הערה 4.2 שימו לב ש S שמופיע בהגדרה אינו חייב להיות תת־מרחב של V, אבל S^0 הוא תמיד תת־מרחב של V^* (נא לבדוק!).

טענה 4.3 $V^* = \{0\}^0$, $\{\bar{0}\} = V^0$. ($\bar{0}$ הוא פונקציונל האפס - ששולח כל וקטור ב V ל 0).

תרגיל: הוכח את השפט הבא:

משפט 4.4 יהי V מרחב וקטורי n מימדי, $W \subseteq V$ תת־מרחב v מימדי. אזי W^0 הוא תת־מרחב וקטורי $n-m$ מימדי.

הוכחה: $B = \{w_1, \ldots, w_m, v_1 \ldots v_{n-m}\}$ בסיס של V כך ש m הוקטורים הראשונים שלו הם בסיס של W. יהי $B^* = \{f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots . g_{n-m}\}$ הבסיס הדואלי של V^*. אנו נראה, ש $U = span\{g_1, \ldots, g_{n-m}\} = W^0$.

1. $U \supseteq W^0$. יהי $g \in U$. אזי $g = \sum_{i=1}^{n-m} g_i$. לכל $1 \leq w_i \leq m$ מתקיים $[w_i, g] = \sum_{j=1}^{n-m} [w_i, g_j] = 0$. מכיוון ש g מתאפסת על הבסיס של W, g מתאפסת על W.

2. $U \subseteq W^0$. יהי $f \in W^0$. אזי $f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i + \sum_{j=1}^{n-m} \beta_j g_j$. לכל $1 \leq i \leq m$, $0 = [w_i\,, f] = \alpha_i$. לכן $f \in U$.

■

כמו שאמרנו קודם, כאשר ל V יש מימד סופי, אנחנו מזהים את V עם V^{**} לאור האיזומורפיזם הטבעי.

משפט 4.5 יהי V מרחב בקטורי, $W \subseteq V$ ת"מ, אזי $\left(W^0\right)^0 = W$.

הוכחה: לפי ההגדרה, לכל $w \in W,\, g \in W^0$ מתקיים, $[w,\, g] = 0$, לכן $W \subseteq W^{00}$. מצד שני, ל W^{00} ו W אותו מימד לפי הטענה הקודמת, לכן W ו W^{00} שווים. ■

5 המרחב הדואלי של סכום ישר

משפט 5.1 יהי V מרחב וקטורי, $U, W \subseteq V$ תתי־מרחבים של V כך ש $V = W \oplus V$, אזי $V^* \cong W^0, V^* \cong V^0$ ו $W^* = W^0 \oplus U^0$.

הוכחה: נראה $W^0 \cap U^0 = \{0\}$. יהי $f \in W^0 \cap U^0$. לכל $v \in V$ קיימים $u \in U, w \in W$ כך ש $v = u + w$. אזי מתקיים $[u + w,\, f] = [u,\, f] + [w,\, f] = 0 + 0 = 0$. לכן $v^* = \bar{0}$.

נראה ש $W^0 + U^0 = V^*$. יהי $f \in V^*$. לכל $u + w = v \in V$, נסמן $f_U(v) := f(w),\, f_W\,(v) = f\,(u)$. קל לראות ש $f = f_U + f_W$, ו $f_U \in U^0,\, f_W \in W^0$. לכן $V^* = U \oplus V$.

נראה שקיים איזומורפיזם בין W^0 ו U^*. נגדיר $\phi : W^0 \mapsto U^*$ על ידי $\phi(f) = f\mid_U$. בדיקה שגירתית מראה שהעתקה הזאת היא לינארית. כמו כן, נגדיר $\psi : U^* \mapsto W^0$, לפי $\psi(f)(v) = \psi(f)(w+u) = f(u)$. קל לבדוק (אבל תבדקו!) ש ψ הוא הופכי דו־כיווני של ϕ. ■