1 פולינום טיילור

הגדרה 1. תהי $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ פונקציה הגזירה n פעמים, ותהי $x_0\in(a,b)$. **פולינום טיילור** של f סביב x_0 מסדר n הוא הפולינום

$$P_n(x,x_0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

אם $x_0=0$, לפעמים קוראים לפולינום זה **פולינום טיילור–מקלורן** או **פולינום מקלורן**.
מסמנים את **השארית** בתור $R_n(x,x_0)=f(x)-P_n(x,x_0)$

הערה 1. פולינום טיילור הוא הפולינום היחיד ממעלה n כך ש-$n+1$ הנגזרות שלו מזדהות עם הנגזרות של f, ולכן הוא מקרב את f בסביבה של x_0.

דוגמה 1. ניתן כמה דוגמאות לפולינומי טיילור של פונקציות מוכרות:

1. פולינום טיילור של e^x סביב $x_0=0$ מסדר n הוא $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k$.
2. פולינום טיילור של $\ln(1+x)$ סביב $x_0=0$ מסדר n הוא $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$.
3. פולינום טיילור של $\sin(x)$ סביב $x_0=0$ מסדר $2n+1$ הוא $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$.
4. פולינום טיילור של $\cos(x)$ סביב $x_0=0$ מסדר $2n$ הוא $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$.

רוצים להבין <u>כמה</u> פולינום טיילור קרוב לפונקציה. יש שני משפטים הנותנים לנו את היכולת למדוד את הקירוב:

משפט 1 (פיתוח טיילור עם שארית בצורת פיאנו). *תהי $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ פונקציה הגזירה n פעמים, ותהי $x_0\in(a,b)$. נניח ש-$P_n(x,x_0)$ פולינום טיילור של f סביב x_0 מסדר n. אזי*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_n(x,x_0)}{(x-x_0)^n}==0$$

משפט 2 (פיתוח טיילור עם שארית בצורת לגראנז'). *תהי $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ פונקציה הגזירה $n+1$ פעמים, ותהי $x_0\in(a,b)$. נניח ש-$P_n(x,x_0)$ פולינום טיילור של f סביב x_0 מסדר n. אזי קיימת נקודה c בין x_0 ל-x שעבורה*

$$f(x)-P_n(x,x_0)=\frac{f^{(n+1)(c)}}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

(כמובן, c תלוי ב-x).

מהמשפט האחרון אפשר להגיע למסקנה לגבי אומדן השארית בחישוב עם פולינום טיילור:

מסקנה 3. *תהי $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ פונקציה הגזירה $n+1$ פעמים, ותהי $x_0\in(a,b)$. נניח ש-$P_n(x,x_0)$ פולינום טיילור של f סביב x_0 מסדר n, ונרשום $R_n(x,x_0)=f(x)-P_n(x,x_0)$. עוד נניח שהנגזרת ה-$n+1$ של f חסומה בין x_0 ל-x, כלומר קיים $M>0$ שעבורו לכל c בין x_0 ל-x, $\left|f^{(n+1)}(c)\right|\le M$. אזי השגיאה מקיימת*

$$|f(x)-P_n(x,x_0)|\le\frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$$

דוגמה 2. נחשב את $\log 1.5$ בקירוב של 2 ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

נסתבל על $f(x)=\log(1+x)$. אנו זוכרים כי פולינום טיילור של f מסדר 7 סביב $x_0=0$ הוא:

$$P_7(x,0)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7}$$

לפי לגרנז' השארית היא מהצורה $f(0.5)-P_7(0.5,0)=R_7(0.5,0)=\frac{f^{(8)}(c)}{8!}(0.5-0)^8$ עבור $0<c<0.5$; אבל

$$|f^{(8)}(c)|=\left|-\frac{5040}{(1+c)^8}\right|\le\frac{5040}{(1+0)^5}=5040$$

(אי השוויון נבון משום ש-$c\in(0,0.5)$). מכאן שהשגיאה חסומה על ידי

$$|f(0.5)-P_7(0.5,0)|\le\frac{5040}{8!}0.5^8<0.001$$

לכן הפולינום מסדר 7 נותן קירוב טוב מספיק, ואז אם נציב $x=0.5$ נקבל מספר ש-3 הספרות הראשונות שלו אחרי הנקודה הן 0.405 ולכן אם ניקח את הקירוב ל-2 ספרות אחרי הנקודה נקבל 0.41 .

נראה שימוש נוסף של פולינום טיילור, והפעם - לחישוב גבולות.

דוגמה 3. נרצה לחשב את

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{\frac{-x^2}{2}}}{x^4}$$

נזכור כי פולינומי טיילור מסדר 4 של הפונקציות הם:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+R_1(x),e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+R_2(x)$$

כאשר ידוע, לפי השארית בצורת פיאנו,

$$\lim_{x\to0}\frac{R_1(x)}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{R_2(x)}{x^4}=0$$

נציב את הפיתוחים בגבול, ונקבל:

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{\frac{x^2}{2}}}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+R_1(x)-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}-R_2(x)}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^4}{12}+R_1(x)-R_2(x)}{x^4}=-\frac{1}{12}$$