17 בינואר 2024

1. נביט בפונקציה $f\left(x,y\right)=xy+\frac{x}{y}$

(א) מצאו את משוואת המישור המשיק בנקודה $\left(1,2\right)$.
פתרון: משוואת המישור המשיק בנקודה $\left(a,b\right)$ הוא

$$z=f_{x}\left(a,b\right)x+f_{y}\left(a,b\right)y+C$$

אצלנו:

$$\begin{aligned}f_{x}\left(x,y\right)&=y+\frac{1}{y}\\ f_{y}\left(x,y\right)&=x-\frac{x}{y^{2}}\end{aligned}$$

ולכן המישור המשיק בנקודה $\left(1,2\right)$ הוא

$$\begin{aligned}z&=f_{x}\left(1,2\right)x+f_{y}\left(1,2\right)y+C\\ &=\frac{5}{2}x+\frac{3}{4}y+C\end{aligned}$$

עבור קבוע C שנמצא על ידי הצבה. נציב את הנקודה

$$\left(1,2,f\left(1,2\right)\right)=\left(1,2,\frac{5}{2}\right)$$

ונקבל

$$\frac{5}{2}=\frac{5}{2}\cdot1+\frac{3}{4}\cdot2+C$$

ולכן $C=-\frac{3}{2}$ ומכאן לתשובה הסופית:

$$z=\frac{5}{2}x+\frac{3}{4}y-\frac{3}{2}$$

(ב) מצאו את הנגזרת בנקודה $\left(1,1\right)$ בכיוון $\left(-1,1\right)$
פתרון: נחשב את הגרדיאנט:

$$\begin{aligned}\nabla f\left(x,y\right)&=\left(f_{x}\left(x,y\right),\left(f_{y}\left(x,y\right)\right)\right)\\ &=\left(y+\frac{1}{y},x-\frac{x}{y^{2}}\right)\end{aligned}$$

(את הנגזרות f_x, f_y כבר מצאנו בסעיף קודם). כעת הנגזרת בנקודה (a,b) בכיוון $\vec{v}$ נתונה על ידי

$$\nabla f(a,b)\cdot\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

ואצלנו:

$$\nabla f(1,1)\cdot\frac{(-1,1)}{\|(-1,1)\|}=(2,0)\cdot\frac{(-1,1)}{\sqrt{2}}=\frac{-2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$$

2. נביט בפונקציה $f(x,y)=x+y$

(א) מצאו את המקסימום והמינימום של $f(x,y)$ בתחום $D=\left\{(x,y)\ \mid\ x^2+y^2\le 4\right\}$.

פתרון: נתחיל עם נקודות חשודות של $f(x,y)$. הם מתקבלות כאשר $\nabla f(x,y)=(0,0)$. נחשב

$$\begin{aligned}f_x(x,y)&=1\\ f_y(x,y)&=0\end{aligned}$$

ולכן $\nabla f(x,y)\neq(0,0)$. מכאן שאין נקודות חשודות בפנים התחום ונשאר לבחון את שפת התחום שהיא $\left\{(x,y)\mid x^2+y^2=4\right\}$. נשתמש בכופלי לגרנז' עם הפונקציה שמתארת את השפה $g=x^2+y^2-4$. נקבל את המשוואות

$$\begin{cases}1&=\lambda\cdot(2x)\\1&=\lambda\cdot(2y)\\x^2+y^2&=4\end{cases}$$

נחסר את המשוואה השניה מהראשונה לקבל

$$0=\lambda\cdot(2x)-\lambda\cdot(2y)=2\lambda\cdot(x-y)$$

ואז:

- או $\lambda=0$ ואז רואים שהמשוואה הראשונה לא מתקיימת (ולכן אפשרות זאת נפסלת)
- או $x=y$ ואז $\lambda=\frac{1}{2x}$לפי המשוואה הראשונה ($x\neq0$ לפי המשוואה הראשונה) ואז מהמשוואה השלישית נקבל $2x^2=4$ ולכן $x=\pm\sqrt{2}$. קל לראות שכל המשוואות מתקיימות עבור $(x,y,\lambda)=\left(\sqrt{2},\sqrt{2},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right),\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2},-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ ולכן יש לנו שתי נקודות חשודות $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$

נציב בפונקציה

$$f(x,y)=x+y$$

ונראה איפה מתקבל ערך המינימום ואיפה המקסימום.

$$f\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2},f\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)=-2\sqrt{2}$$

לכן המקסימום הוא $2\sqrt{2}$ והמינימום הוא $-2\sqrt{2}$.

(ב) מצאו את המקסימום והמינימום של $f(x,y)$ בתחום $D=\{(x,y)\ \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$.
פתרון: ראינו שבפנים התחום אין נקודות חשודות לכן נותר לבדוק על השפה.
השפה מוגדרת מ 4 ישרים

$$y=0$$
$$y=1$$
$$x=0$$
$$x=1$$

ונקודות החיתוך בניהם הם $(1,0),(1,1),(0,1),(0,0)$. כעת נשתמש בכופלי לגרנז' בכל אחד מהישרים למצוא נקודות חשודות על השפה.

- עבור $g_1=y$ נקבל

$$\begin{cases}1 & =\lambda\cdot 0\\ 1 & =\lambda\cdot 1\\ y & =0\end{cases}$$

קיבלנו משוואת סתירה במשוואה הראשונה ולכן אין נקודות חשודות במקרה זה.

- עבור $g_2=y-1$ נקבל

$$\begin{cases}1 & =\lambda\cdot 0\\ 1 & =\lambda\cdot 1\\ y & =1\end{cases}$$

קיבלנו משוואת סתירה במשוואה הראשונה ולכן אין נקודות חשודות במקרה זה.

- עבור $g_3=x$ נקבל

$$\begin{cases}1 & =\lambda\cdot 1\\ 1 & =\lambda\cdot 0\\ x & =0\end{cases}$$

קיבלנו משוואת סתירה במשוואה השניה ולכן אין נקודות חשודות במקרה זה.

- עבור $g_4=x-1$ נקבל

$$\begin{cases}1 & =\lambda\cdot 1\\ 1 & =\lambda\cdot 0\\ x & =1\end{cases}$$

קיבלנו משוואת סתירה במשוואה השניה ולכן אין נקודות חשודות במקרה זה.

לסיכום: רק נקודות החיתוך $(1,0),(1,1),(0,1),(0,0)$ חשודות על השפה. נציב בפונקציה

$$f(x,y)=x+y$$

ונראה איפה מתקבל ערך המינימום ואיפה המקסימום.

$$f(0,0)=0, f(0,1)=1, f(1,1)=2, f(1,0)=1$$

לכן המקסימום הוא 2 והמינימום הוא 0.

3. מצאו פתרון למד"ר $y'=\frac{y+\cos(x)}{-x}$ המקיים $y(\pi)=1$.
פתרון: נסדר מחדש לקבל

$$y'+\frac{1}{x}y=-\frac{\cos(x)}{x}$$

שזוהי מד"ר לינארית מסדר ראשון מהצורה $y'+a(x)y=b(x)$ עבור $a(x)=\frac{1}{x},b(x)=-\frac{\cos(x)}{x}$. הפתרון שלה הוא

$$e^{-A(x)}\left(C+\int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

עבור $A(x)=\int a(x)\mathrm{dx}=\int\frac{1}{x}\mathrm{dx}=\ln|x|$. נציב

$$\begin{aligned}e^{-\ln|x|}\left(C+\int-\frac{\cos(x)}{x}e^{\ln|x|}\mathrm{dx}\right)&=|x|^{-1}\left(C-\int\frac{\cos(x)}{x}|x|\,\mathrm{dx}\right)\\&=|x|^{-1}C-|x|^{-1}\int\frac{\cos(x)}{x}|x|\,\mathrm{dx}\end{aligned}$$

ונשים לב: עבור $x>0$ מתקיים $|x|=x$ ואז אפשר להוריד את הערך המוחלט מ

$$|x|^{-1}\int\frac{\cos(x)}{x}|x|\,\mathrm{dx}=x^{-1}\int\frac{\cos(x)}{x}x\mathrm{dx}$$

ועבור $|x|<0$ מתקיים $|x|=-x$ ואז

$$|x|^{-1}\int\frac{\cos(x)}{x}|x|\,\mathrm{dx}=-x^{-1}\int\frac{\cos(x)}{x}(-x)\,\mathrm{dx}=x^{-1}\int\frac{\cos(x)}{x}x\mathrm{dx}$$

ולכן בכל מקרה אפשר להמשיך עם $x^{-1}\int\frac{\cos(x)}{x}x\mathrm{dx}$. נמשיך:

$$\begin{aligned}|x|^{-1}C-x^{-1}\int\frac{\cos(x)}{x}|x|\,\mathrm{dx}&=|x|^{-1}C-x^{-1}\int\frac{\cos(x)}{x}x\mathrm{dx}\\&=|x|^{-1}C-x^{-1}\int\cos(x)\mathrm{dx}\\&=|x|^{-1}C-x^{-1}\sin(x)\end{aligned}$$

ונקבל לסיכום:

$$y=|x|^{-1}C-x^{-1}\sin(x).$$

כעת נציב את תנאי ההתחלה $y(\pi)=1$ למצוא את C:

$$1=|\pi|^{-1}C-\pi^{-1}\sin(\pi)=\frac{C}{\pi}$$

לכן $C=\pi$ והתשובה הסופית היא $y(x)=|x|^{-1}\pi-x^{-1}\sin(x)$.

4. מצאו פתרון למד"ר $y'=\frac{x}{e^y}$ המקיים $y(0)=0$.
פתרון: נכפול ב e^y ונעבור לכתיב dx,dy

$$e^y\mathrm{dy}=x\mathrm{dx}$$

שזוהי משוואת פרידה. נעשה אינטגרל לשני האגפים (כל אחד לפי המשתנה שלו):

$$\int e^y \mathrm{dy} = e^y + C$$
$$\int x \mathrm{dx} = \frac{x^2}{2} + C$$

לכן

$$e^y = \frac{x^2}{2} + C$$

ואחרי חילוץ y:

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{2} + C\right).$$

נציב תנאי התחלה $y(0) = 0$ למצוא את C:

$$0 = \ln\left(\frac{0^2}{2} + C\right) = \ln(C)$$

לכן $C = 1$. תשובה סופית

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{2} + 1\right).$$

5. כדור בעל מסה של $m = 1\text{kg}$ נעזב מגובה של 20m.

(א) בהנחה שאין התנגדות אוויר, תוך כמה זמן יגיע הכדור אל הקרקע?
פתרון: נסמן מיקום הכדור ב 20 (בפרט הקרקע היא נקודת ה 0). נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן t (בפרט $y(0) = 20$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg = 1 \cdot g$ (כאשר $g \approx 9.8$ קבוע הכבידה) וכיוונו לכיוון השלילי. לכן הכח הוא $-g$. מהשיוון $F = ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל על הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-g = ma = a$$

או $-g = y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום). לכן, על ידי אינטגרל פשוט, נקבל ש

$$y'(t) = -gt + c_1$$

ו

$$y(t) = -g\frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2$$

וכעת נציב את תנאי ההתחלה לחישוב הקבועים c_1, c_2. נתון כי $y'(0) = 0$ (אין מהירות התחלתית) לכן

$$0 = y'(0) = -g \cdot 0 + c_1 = c_1$$

ובנוסף $y(0)=20$ ולכן

$$20=y(0)=-g\frac{0^2}{2}+c_1\cdot 0+c_2=c_2$$

ולסיכום $y(t)=-g\frac{t^2}{2}+20$. כעת נרצה את הזמן t עבורו $y(t)=0$. נשווה

$$-g\frac{t^2}{2}+20=0$$

לכן $t=\pm\sqrt{\frac{40}{g}}$. כיוון שאנחנו יודעים ש $t>0$ (רוצים לדעת כמה זמן **אחרי** שחרור הכדור הוא יפגע בקרקע) נקבל ש $t=\sqrt{\frac{40}{g}}$.

(ב) בהנחה שהתנגדות האוויר היא בגודל bv כאשר $b=0.05$, מה תהיה מהירות הכדור אחרי 2 שניות?

פתרון: נסמן מיקום הכדור ב 20 (בפרט הקרקע היא נקודת ה 0). נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן t (בפרט $y(0)=20$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg=1\cdot g$ (כאשר $g\approx 9.8$ קבוע הכבידה) וכיוונו לכיוון השלילי. בנוסף פועל על הכדור התנגדות האוויר שהוא בגודל bv וכיוונו הפוך מהכיוון של v (שמ $t=0$ והפגיעה בקרקע הוא מנוגד לכיוון של כח הכבידה) לכן סימנו $-bv$ (כיוון ש v שלילי). לכן הכח הוא $-g-bv$. מהשיוון $F=ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל כל הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-g-bv=ma=a$$

או $-g-by'(t)=y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום ומהירות היא הנגזרת של המיקום). נסמן $z=y'$ ונקבל

$$z'+bz=-g$$

שזוהי מד"ר לינארית מהצורה $z'+a(x)z=b(x)$ (עבור $a(x)=b,b(x)=-g$) שפתרונה

$$e^{-A(x)}\left(C+\int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

כאשר $A(x)$ קדומה של $a(x)$. אצלנו נבחר $A(x)=bx$ ונציב

$$e^{-bx}\left(C-\int ge^{bx}\mathrm{dx}\right)=e^{-bx}\left(C-\frac{g}{b}e^{bx}\right)=e^{-bx}C-\frac{g}{b}$$

לכן:

$$z(t)=e^{-bt}C-\frac{g}{b}$$

או

$$y'(t)=e^{-bt}C-\frac{g}{b}.$$

כעת נציב תנאי התחלה: $y'(0)=0$ (אין מהירות התחלתית) לכן

$$0=y'(0)=e^{-b\cdot 0}C-\frac{g}{b}=C-\frac{g}{b}$$

ומכאן $C=\frac{g}{b}$. מכאן שהמהירות אחרי 2 שניות היא

$$y'(2)=e^{-b\cdot 2}\cdot\frac{g}{b}-\frac{g}{b}=\frac{g}{b}\left(e^{-2b}-1\right).$$