תרגול כיתה 6 – מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

משתנה מקרי רציף

מתרגלים: ליאור דקל ואדם צ'פמן

תכונות פונקציית הצפיפות f (של מ"מ רציף X):

1) $f(x) \geq 0 \quad \left(\forall x \in \mathbb{R}\right)$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

חישוב פונקצית ההתפלגות המצטברת F (של מ"מ רציף X):

1) $F_X\left(t\right) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx$

2) $\int_{a}^{b} f(x)dx = P\left(a < X \leq b\right) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$

התוחלת והשונות של מ"מ רציף X:

- התוחלת: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$
- השונות: $Var\left(X\right) = E(X^2) - \left[E(x)\right]^2$

תרגיל 1

פונקציית הצפיפות של משתנה X היא $f(x) = \begin{cases} cx^n & ,0 \leq x \leq 1 \\ 0 & ,else \end{cases}$.

א). חשב את c.

ב). מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת $F_X(x)$.

ג). חשב את $P(X \geq a)$ לכל $0 \leq a \leq 1$.

פתרון:

א). מציאת c,

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{1} cx^n dx = \left.\frac{cx^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{c}{n+1}$$

ולכן $c = n+1$.

ב). פונקציית ההתפלגות המצטברת,

$$F_X\left(X\right)=P(X\le x)=\int_0^x f(t)dt=\int_a^1 (n+1)t^n dt=t^{n+1}\Big|_0^x=x^{n+1}$$

ג). ההסתברות בסעיף זה היא המשלימה של ההסתברות בסעיף ב',

$$.P(X\ge a)=1-P(X<a)=1-F_X\left(a\right)=1-a^{n+1}$$

<u>תרגיל 2</u>

פונקציית הצפיפות של מ"מ X היא

$$f(t)=\begin{cases} at^2+bt & ,0\le t\le 1 \\ 0 & ,else \end{cases}$$

כאשר a,b קבועים ממשים.

נתון בנוסף כי $E(X)=0.6$. חשב את $P(X\le \frac{1}{2})$ ואת $Var(X)$.

פתרון:

ראשית, נמצא את a ו-b.

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt=\int_0^1 (at^2+bt)dt=\frac{a}{3}t^3+\frac{b}{2}t^2\Big|_0^1=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}$$

$$0.6=\int_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt=\int_0^1 (at^3+bt^2)dt=\frac{a}{4}t^4+\frac{b}{3}t^3\Big|_0^1=\frac{a}{4}+\frac{b}{3}$$

לכן $-\frac{a}{12}=0.2$, כלומר $a=-2.4$, וכן $b=3.6$.

ההסתברות המבוקשת,

$$P(X\le\frac{1}{2})=\int_0^{0.5}(-2.4t^2+3.6t)dt=-0.8t^3+1.8t^2\Big|_0^{0.5}=-0.2+0.45=0.25$$

והשונות,

$$V(X)=\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)dt-\left[E(X)\right]^2=\int_0^1(-2.4t^4+3.6t^3)dt-0.36=$$

$$-0.48t^5+0.9t^4\Big|_0^1-0.36=-0.48+0.9-0.36=0.06$$

<u>תרגיל 3</u>

זמן החיים (בחודשים) של שפופרת אלקטרונית הוא משתנה מקרי X שצפיפותו

$$.\,f(t)=\begin{cases} te^{-t} & ,0\le t \\ 0 & ,else\end{cases}$$

א). מהי תוחלת זמן-החיים של שפופרת?

ב) במכשיר פועלות 10 שפופרת ב"ת. מה הסיכוי שלפחות לשתיים מהן יהיה זמן חיים של יותר משלושה חודשים?

פתרון:

א).

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt=\int_0^{\infty} t^2e^{-t}dt=-t^2e^{-t}-2te^{-t}-2e^{-t}\Big|_0^{\infty}=2$$

ב). ההסתברות ששפופרת תפעל יותר מ-3 חודשים היא.

$$P\left(X>3\right)=1-P\left(X\le 3\right)=1-\int_0^3 te^{-t}dt=1-\left[-\left(1+t\right)e^{-t}\right]_0^3\approx 0.2$$

יהי Y מ"מ הסופר את מס' השפופרות הפועלות מתוך ה-10. מאחר והשפופרות ב"ת,

אזי $Y\sim Bin\left(10,0.2\right)$, לכן

$$P(Y \geq 2) = 1 - \left[P(Y=0) + P(Y=1)\right]$$
$$= 1 - \left[\binom{10}{0}0.2^0 0.8^{10} + \binom{10}{1}0.2^1 0.8^9\right] = 0.624$$

<u>תרגיל 4</u>

נתון קטע ממשי שאורכו 1. בוחרים באקראי נקודה על הקטע, כך שפונציית הצפיפות של

בחירת הנקודה היא $f(t) = \begin{cases} 2t & ,0 \leq t \leq 1 \\ 0 & ,else \end{cases}$, מהי ההסתברות שהנקודה תחלק

את הקטע לשני חלקים כך שהיחס בין החלק הקצר לחלק הארוך קטן מ-$\frac{1}{4}$?

פתרון:

היא פונקציית הצפיפות. הנקודה a שעבורה הקטע השמאלי $[0,a]$ הוא פי ארבע ארוך

מהקטע הימני $[a,1]$ מקיימת $\frac{a}{1-a} = 4$, כלומר $4 - 4a = a$ ולכן $a = \frac{4}{5}$.

הסיכוי שהקטע השמאלי לפחות פי 4 ארוך מהימני הוא

$$\int_{\frac{4}{5}}^{1} 2t\,dt = t^2 \Big|_{\frac{4}{5}}^{1} = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}.$$

הנקודה a שעבורה הקטע השמאלי $[0,a]$ הוא פי ארבע קצר מהקטע הימני $[a,1]$

מקיימת $\frac{a}{1-a} = \frac{1}{4}$, כלומר $1 - a = 4a$ ולכן $a = \frac{1}{5}$.

(הערה: ניתן גם להפעיל שיקולי סימטריה)

הסיכוי שהקטע השמאלי לפחות פי 4 קצר מהימני הוא $\int_0^{\frac{1}{5}} 2t\,dt = t^2\Big|_0^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{25}$.

סך-הכל, הסיכוי שהקטע הקצר הוא לפחות פי 4 קצר מהקטע הארוך הוא

$$\frac{9}{25}+\frac{1}{25}=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}.$$

<u>תרגיל 5</u>

א). נתון שהמ"מ הרציף X מתפלג אחיד עם פונ' הצפיפות $(0<x<1)$, $f_X(x)=1$.
נגדיר מ"מ $Z=4X+1$. מצא את פונ' ההתפלגות ואת פונ' הצפיפות של Z.
ב). יהי X משתנה עם צפיפות $(x>0)$ $f_X(x)=2xe^{-x^2}$. מצא את הצפיפות של $Y=X^2$.

פתרון:

א). נמצא פונ' ההתפלגות המצטברת תחילה:

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(4X+1\le z)=P\left(X\le\frac{z-1}{4}\right)=F_X\left(\frac{z-1}{4}\right)$$

פונ' ההתפלגות המצטברת של X: $F_X(x)=\frac{x-a}{b-a}=\frac{x-0}{1-0}=x$, לכן

$$F_Z(z)=F_X\left(\frac{z-1}{4}\right)=\frac{z-1}{4}\qquad (1<z<5)$$

פונ' הצפיפות מתקבלת מגזירת פונ' ההתפלגות המצטברת:

$$f_z(z)=\frac{d\left[F_Z(z)\right]}{dz}=\frac{d\left[(z-1)/4\right]}{dz}=\frac{1}{4}\qquad (1<z<5)$$

באופן כללי, אם $Z=aX+b$, $X\sim U(0,1)$

$$f_z(z)=\left[F_Z(z)\right]'=\left[F_x\left(\frac{z-b}{a}\right)\right]'=f_x\left(\frac{z-b}{a}\right)\cdot\left(\frac{z-b}{a}\right)'=1\cdot\frac{1}{a}=\left|\frac{1}{a}\right|$$

ב).לכל y,

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le \sqrt{y})=$$
$$F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$$

נגזור את האגפים ונקבל

$$.f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})\right)$$

נציב את $f_X\left(x\right)=2xe^{-x^2}$. מאחר והתחום הוא $x>0$ אזי החלק השלילי מתאפס.

$$f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y})=\frac{1}{2\sqrt{y}}2\sqrt{y}\cdot e^{-\left(\sqrt{y}\right)^2}=e^{-y}$$

כלומר – $Y\sim Exp\left(1\right)$