מבנים אלגבריים 1 תשע"ה –תרגיל 3

1. תהי G חבורה, $a,b\in G$. הוכח או הפרך: $o(ab)=o(ba)$.

2. הוכיחו כי בחבורה G, $a^n=e\iff o(a)\mid n$. (רמז: השתמשו בעובדה שקיימים מספרים q,r כך ש- $n=q\cdot o(a)+r$ ו- $0\le r<o(a)$).

3. הוכיחו כי עבור כל איבר בחבורה $a\in G$ מתקיים $o(a)=|<a>|$.

4. תהי $G=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ חבורה אבלית ונגדיר $b=a_1a_2\cdots a_n$.
   הוכח:
   א. $b^2=1$.
   ב. אם ב- G אין איבר מסדר 2 אזי $b=e$.
   ג. אם ב- G יש איבר יחיד מסדר 2 אז הוא b.

5. בחבורה G נסמן $G^m:=\{g^m\mid g\in G\}$. הוכח שאם G אבלית אז מתקיים: $G^m\le G$.

6. קבעו האם התתי-קבוצות הבאות הן תתי חבורות:
   a. $\left\{\begin{pmatrix} a & c\\ 0 & b\end{pmatrix}\middle| ab\neq 0\right\}\subset GL_2(\mathbb{R})$
   b. $\left\{\begin{pmatrix} a & a\\ 0 & b\end{pmatrix}\middle| ab\neq 0\right\}\subset GL_2(\mathbb{R})$
   c. $\{5k|k\in\mathbb{Z}_{10}\}\subseteq\mathbb{Z}_{10}$
   d. $\{5k|k\in U_{10}\}\subseteq U_{10}$
   e. $kU_n\subseteq U_n$ כאשר $k|n$.
   f. $kU_n\subseteq U_n$ כאשר $(k,n)=1$.
   g. $\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}|\ f(0)=0$ על וחח"ע$\}\subset\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}|$ על וחח"ע$\}$ (ביחס לפעולות ההרכבה).

7. נניח H,K תתי חבורות של G. הוכח:
   א. אם $H\le G$ & $K\le H$ אזי $K\le G$.
   ב. $H\cup K\le G$ אם ורק אם $K\subset H$ או $H\subset K$.
   ג. $H\cap K\le G$ (נכון גם עבור אינסוף תתי חבורות).