תרגיל 6 בוגרים/תרגיל 7 תיכוניסטים.

1 כלל שרשרת ונגזרת כיוונית.

תרגיל 1. (ממבחן). תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. הראו, שאם $g_y(x)=f(x,y)$ רציפה ב x לכל y, ונניח, שקיים $M>0$ כך שלכל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\left|f'_y(x,y)\right|<M$. הראו, ש f רציפה ב $\mathbb{R}^2$.

פתרון. נראה ש f רציפה בכל $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ על פי ההגדרה. יהי $\varepsilon>0$. על פי הנתון, $f(x,b)$ היא פונקציה רציפה של x, ולכן קיים $\delta_1>0$ כך שאם $|x-a|<\delta_1$, אז $|f(x)-f(a)|<\frac{\epsilon}{2}$. בנוסף, כיוון ש $\left|f'_y(x,y)\right|<M$, אזי על פי משפט ערך הביניים $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|<M|y_1-y_2|$. לכן, אם $|y_1-y_2|<\frac{\varepsilon}{2M}$, $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|<\frac{\varepsilon}{2}$. נבחר, $\delta=\min\left\{\delta_1,\frac{\varepsilon}{2M}\right\}$. עכשיו, לכל (x,y) כך

$$\|(x,y)-(a,b)\|<\delta ,$$

גם $|x-a|<\delta$ וגם $|y-b|<\delta$ ולכן:

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(a,b)|&<|f(x,y)-f(x,b)|+|f(x,b)-f(a,b)|\\&<\delta M+\frac{\epsilon}{2}\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

תרגיל 2. נגדיר $g(x,y)=\left(x,x^2-y\right)$. נשים לב, שהפונצקיה הפיכה ולכן ניתן לתאר כל נקודה ב $\mathbb{R}^2$בעזרת קואודינטות

$$\begin{aligned}u&=x\\v&=x^2-y\end{aligned}$$

נשים לב, שלמשה $u=x$ וכל נקודה (x,y) ניתן לבטא באופן יחיד על ידי הקואורדינטות

$$(x(x,v),y(x,v))=(x(u,v),y(u,v))$$

.

נכון או לא נכון? הסבירו.

1. $\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial x}{\partial x}=1$.
2. $\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial x}=0$.

פתרון. בשאלה הזאת, חשוב להפנים, שנגזרת חלקית בעצם תלוייה בשני המשתנים. פשוט נכתוב את המטריצת יעקובי ונבדוק אם השוויונות מתקיימים. על מנת לעשות את זה, נבטא במפורש את x, y כפונקציה של u, v.

$$x = u$$
$$y = x^2 - v = u^2 - v$$

ולכן: $\frac{\partial x}{\partial u} = 1$, $\frac{\partial y}{\partial u} = 2u \neq 0$. לכן סעיף א' נכון וסעיף ב' אינו נכון.

תרגיל 3. תהי $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ דיפרנציאבילית, ונניח ש

$$\frac{\partial f}{\partial u}(10,4) = 5$$
$$\frac{\partial f}{\partial u}(10,4) = 2$$

נגדיר:

$$u(x,y) = x^2 + y^3$$
$$.v(x,y) = x + y$$

נגדיר $z(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$. חשבו את $\frac{\partial z}{\partial x}(3,1)$ ואת $\frac{\partial z}{\partial y}(3,1)$.

פתרון. נשתמש בכלל שרשרת. מתקיים:

$$\begin{aligned} dz(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} &= df(u(x,y), v(x,y))\, d\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y), v(x,y)) & \frac{\partial f}{\partial v}(u(x,y), v(x,y)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

נציב, $(x,y) = (3,1)$. נקבל: $u = 10, y = 4$ ולכן:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y), v(x,y)) & \frac{\partial f}{\partial v}(u(x,y), v(x,y)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} &= \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(10,4) & \frac{\partial f}{\partial u}(10,4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 3y^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}(3,1) &= \\ \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &= \\ \begin{pmatrix} 32 & 17 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix}(3,1) \end{aligned}$$

תרגיל 4. תהי

$$f(x,y,z) = \left(\sin\left(x^2\right) + \sin\left(y^2\right) + z^2, e^z\left(x^3 + y^3\right)\right)$$

ונניח שקיימת $g(u,v):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ כך $g(3,2)=\left(\pi^2,\pi^2,0\right)$, g דיפרנציאבילית ב $(3,2)$

$$\frac{\partial g}{\partial u}(3,2)=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ \frac{\partial g}{\partial v}(3,2)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

נגדיר, $h=f\circ g$. מצאו את $\frac{\partial h_2}{\partial u}(3,2)$ ואת $\nabla h_1(3,2)$.

על פי כלל שרשרת מתקיים:

$$\nabla\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\nabla h_1(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\\\nabla h_2(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\end{pmatrix}=J_h(u,v)=$$
$$J_f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot J_g(u,v)=$$
$$\begin{pmatrix}2x\cos x^2 & 2y\sin y^2 & 2z\\3x^2e^z & 3y^2e^z & e^z\left(x^3+y^3\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\\\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}(u,v)$$

נציב $(u,v)=(3,2)$ ונקבל:

$$\begin{pmatrix}2x\cos x^2 & 2y\sin y^2 & 2z\\3x^2e^z & 3y^2e^z & e^z\left(x^3+y^3\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\\\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}2\pi^2\cos\pi^4 & 2\pi^2\sin\pi^4 & 0\\3\pi^4 & 3\pi^4 & 2\pi^6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$$

השורה הראשונה של תוצאת הכפל היא ∇h_1 ומקום $(2,1)$ הוא $\frac{\partial h_2}{\partial u}$. ולכן:

$$\frac{\partial h_2}{\partial u}(3,2)=3\pi^4+2\pi^6$$

ו $\nabla h_1(3,2)=\left(2\pi^2\cos\pi^4\ 2\pi^2\sin\pi^4\right)$.

תרגיל 5. נאמר ש $f:E\to\mathbb{R}^n$ מקיימת את תנאי ליפשיץ, אם קיים $M>0$ כך שלכל $x,y\in E$ מתקיים $|f(x)-f(y)|\le M|f(x)-f(y)|$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1. אם $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ קיימות וחסומות ב E, אזי M מקיימת את תנאי ליפשיץ.

פתרון. הפרכה: ניקח $E=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0)\,|x\ge 0\}$. ז"א E שווה למישור $\mathbb{R}^2$ שהוציאו ממנו את החלק האי-שלילש של ציר ה-x. נגדיר f באופן הבא:

$$f(x,y)=\begin{cases}x & x>0,y>0\\0 & else\end{cases}.$$

תחילה, נשים לב, שהנגזרות החלקיות של f קיימות ורציפות בכל נקודה,

$$f_x(x,y)=\begin{cases}1 & x>0,y>0\\0 & else\end{cases}$$
$$f_y=0$$

מצד שני, fאינה מקיימת את תנאי ליפשיץ: לכל $x>0$,

$$\left|f\left(x,y\right)-f\left(x,-y\right)\right|=x>2y\cdot M$$

לכל M ולכל y מספיק קטן.

2. תהי $f:E\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות (ז"א הנגזרות החלקיות רציפות), אזי f מקיימת את תנאי ליפשיץ ב E.

פתרון. לא. ניקח את הדוגמה מהסעיף הקודם.

3. (ממחבן). אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות, אזי f מקיימת את תנאי ליפשיץ בכדור היחידה הסגור $\overline{B\left(0,1\right)}$

פתרון. הטענה נכונה. f_x,f_y רציפות ולכן חסומות מפני ש $\overline{B\left(0,1\right)}$ קומפקטית. יהי M חסם מלעיל של $\left|f_x\right|,\left|f_y\right|$.

יהיו $\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right)\in\overline{B\left(0,1\right)}$. יהי $d=\left|\left(x_1,y_1\right)-\left(x_2,y_2\right)\right|$ (|| כאן מסמן את הנורמה). אזי מתקיים:

$$\left|x_1-x_2\right|,\left|y_1-y_2\right|<d\ .$$

נחשב:

$$\left|f\left(x_1,y_1\right)-f\left(x_2,y_2\right)\right|\leq\left|f\left(x_1,y_1\right)-f\left(x_2,y_1\right)\right|+\left|f\left(x_2,y_1\right)-f\left(x_2,y_2\right)\right|\ .$$

על פי משפט ערך הביניים, קיימים a בין x_1 ו x_2 ו b בין y_1 ו y_2 כך ש

$$\begin{aligned}\left|f\left(x_1,y_1\right)-f\left(x_2,y_1\right)\right|+\left|f\left(x_2,y_1\right)-f\left(x_2,y_2\right)\right| &=\\ \left|f_y'\left(b\right)\left|y_1-y_2\right|\right|+\left|f_x'\left(a\right)\left|x_1-x_2\right|\right| &=\\ \left|f_y'\left(b\right)\right|\left|y_1-y_2\right|+\left|f_x'\left(a\right)\right|\left|x_1-x_2\right| &\leq\\ &Md+Md=2Md=2M\left|\left(x_1,y_1\right)-\left(x_2,y_2\right)\right|\end{aligned}$$

קיבלנו

$$\left|f\left(x_1,y_1\right)-f\left(x_2,y_2\right)\right|\leq 2M\left|\left(x_1,y_1\right)-\left(x_2,y_2\right)\right|$$

כנדרש.

תרגיל 6. הוכיחו/הרפיכו: אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית, ולכל $v\in\mathbb{R}^n$, $\frac{\partial f}{\partial v}\left(a\right)\geq 0$ אזי $\mathrm{d}f_a=0$ (כלמר, דיפרנציאל הוא העתקת האפס).

הוכחה. כזכור, אם f דיפרנציאבילית, אזי $df_a\left(v\right)=\frac{\partial f}{\partial v}\left(a\right)$. ולכן, לכל v מתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial v}\left(a\right)\geq 0=df_a\left(v\right)=-df_a\left(-v\right)\geq 0\ .$$

אבל, $df_a\left(-v\right)\geq 0$ ולכן, $df_a\left(v\right)=0$ לכל v, ז"א $df_a=0$. □

תרגיל 7. תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית ב a, ו $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ דיפרציאבילית ב $f\left(a\right)$. הראו שלכל $v\in\mathbb{R}^n$ מתקיים:

$$\frac{\partial\left(g\circ f\right)}{\partial v}\left(a\right)=\mathrm{d}g_{f(a)}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\left(a\right)\right)\ .$$

פתרון. נפתח את הביטויים $\frac{\partial(g\circ f)}{\partial v}(a)$ בעזרת הזהות $\frac{\partial h}{\partial v}(a) = dh_a(v)$ ונשתמש בכלל שרשרת ונקבל

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial (g\circ f)}{\partial v}(a) = \\
&d(g\circ f)_a(v) = \\
&\left(dg_{f(a)}\circ df_a\right)(v) = \\
&dg_{f(a)}\left(df_a(v)\right) = dg_{f(a)}\left(\frac{\partial f}{\partial v}(a)\right)
\end{aligned}$$

כנדרש.

תרגיל 8. (ממבחן). תהי $f(x,y) = xe^y - ye^x$. לכל אחת מהנקודות הבאות, מצאו כיוון אחד בו הנגזרת חיובית, כיוון אחד בו הנגזרת שלילית וכיוון אחד שבו הנגזרת מתאפסת, או הוכיחו שלא קיים כזה.

1. ראשית הצירים $(0,0)$.

פתרון. תחילה נחשב את ∇f מכיוון ש

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \mathrm{d}f_a(v) = \nabla f(a)\, v$$

.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^y - ye^x & xe^y - e^x \end{pmatrix}$$

נציב $x=0, y=0$ ונקבל:

$$.\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

שימו, לב, השאלה היא על כיוון - זאת אומרת v הוא וקטור יחידה. אם נציב

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 > 0$$

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 < 0$$

$$v = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 0$$

2. הנקודה $(1,0)$.

$$\nabla f(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1-e \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1-e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 > 0$$

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1-e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 < 0$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{1+(1-e)2}}\begin{pmatrix} e-1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1-e \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1+(1-e)^2}}\begin{pmatrix} e-1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

3. הנקודה $(0,-1)$.

$$\nabla f\left(0,-1\right)=\left(\begin{array}{cc} e^{y}-ye^{x} & xe^{y}-e^{x}\end{array}\right)|_{x=0,y=-1}=\left(1-\frac{1}{e},-1\right)$$

$$v=\left(\begin{array}{c} 1\\ 0\end{array}\right)\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial v}\left(1,0\right)=\left(1-\frac{1}{e},-1\right)\left(\begin{array}{c} 1\\ 0\end{array}\right)=1-\frac{1}{e}>0$$

$$v=\left(\begin{array}{c} -1\\ 0\end{array}\right)\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial v}\left(1,0\right)=\left(\begin{array}{cc} 1-\frac{1}{e}, & -1\end{array}\right)\left(\begin{array}{c} -1\\ 0\end{array}\right)=\frac{1}{e}-1<0$$

$$v=\frac{1}{\sqrt{1+\left(1-\frac{1}{e}\right)^{2}}}\left(\begin{array}{c} 1\\ \frac{1}{e}-1\end{array}\right)\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial v}\left(1,0\right)=\left(\begin{array}{cc} 1-\frac{1}{e}, & -1\end{array}\right)\frac{1}{\sqrt{1+\left(1-\frac{1}{e}\right)^{2}}}\left(\begin{array}{c} 1\\ \frac{1}{e}-1\end{array}\right)=0$$