פתרון 6 באינפי 2

1. נחשב את השטח של האליפסה

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ברביע הראשון ונכפיל אותו ב4. אפשר כמובן להניח ש a, b חיוביים. אם מסתכלים רק על הרביע הראשון האליפסה היא בעצם הפונקציה

$$y=b\sqrt{1-\frac{1}{a^2}x^2}$$

כלומר השטח המבוקש הוא

$$4b\int_0^a\sqrt{1-\frac{1}{a^2}x^2}\mathrm{d}x$$

לצורך נוחות נבצע הצבה $t=\frac{x}{a}$ וכמובן $\mathrm{d}t=\frac{1}{a}\mathrm{d}x$ ואז מקבלים

$$4ab\int_0^1\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$$

כאן מציבים $t=\sin z$ ולכן $\mathrm{d}t=\cos z\mathrm{d}z$ ואז האינטגרל הופך להיות

$$4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 z}\cos z\mathrm{d}z=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2 z}\cos z\mathrm{d}z=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos z|\cos z\mathrm{d}z$$

אבל בתחום $[0,\frac{\pi}{2}]$ הפונקציה $\cos x$ חיובית ולכן אפשר לוותר על הערך המוחלט והאינטגרל שווה ל

$$4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 z\mathrm{d}z=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 z\mathrm{d}z=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2z)\mathrm{d}z=$$

$$=2ab\left.\left(z+\frac{1}{2}\sin 2z\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=2ab(\frac{\pi}{2})=ab\pi$$

2. אם מציירים את הפונקציות הנ"ל, אפשר לראות שהעסק די סימטרי ומספיק לחשב את השטח בין

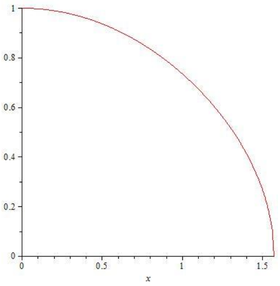
$$f(x)=\sin x$$

$$g(x)=x$$

בקטע $[0, \frac{\pi}{2}]$ ואז לכפול ב 4. כלומר

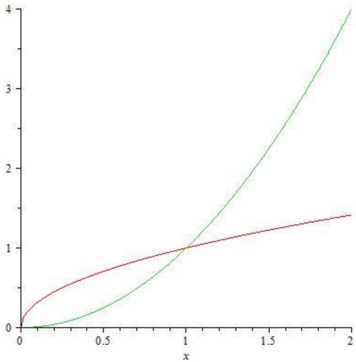
$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x - \sin x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8} - 1$$

שאלה 3



פתרון: $$V=\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{\cos x}\right)^2dx=\pi\sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

שאלה 4



פתרון: נמצא את נקודות החיתוך של שתי העקומות

$$y=x^2,x=y^2$$

$$x^4=x$$

$$x\left(x^3-1\right)=0$$

$$x_1=0,x_2=1$$

$$V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{y}\right)^2dy-\pi\int_0^1\left(y^2\right)^2dy=\frac{\pi}{2}y^2\Big|_0^1-\frac{\pi}{5}y^5\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}=\frac{3\pi}{10}$$

5. לפי נוסחא לאורך עקום עבור $f(x)=\ln\sin x$ נקבל שאורך העקום הוא

$$\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+(\frac{\cos x}{\sin x})^2}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{|\sin x|}\mathrm{d}x$$

אבל בקטע המדובר $\sin x$ היא פונקציה חיובית ולכן זה שווה ל

$$\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

נבצע הצבה $t=\cos x$ וכמובן $\mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x$ ואז נקבל

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{-\mathrm{d}t}{1-t^2}=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t})\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(-\ln|1-t|+\ln|1+t|\right)|_0^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}(\ln\frac{3}{2}-\ln\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\ln 3$$

6. א.

$$\int\limits_{-\infty}^{5}e^x\mathrm{d}x=\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{5}e^x=\lim_{R\to\infty}e^x|_{-R}^{5}=\lim_{R\to\infty}(e^5-e^{-R})=e^5$$

ב.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^x\mathrm{d}x=\int\limits_{-\infty}^{0}e^x\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{\infty}e^x\mathrm{d}x$$

ראינו כבר בסעיף הקודם ש $\int\limits_{-\infty}^{0}e^x\mathrm{d}x$ מתכנס. לעומת זאת

$$\int\limits_{0}^{\infty}e^x\mathrm{d}x=\lim_{R\to\infty}\int\limits_{0}^{\infty}e^x=\lim_{R\to\infty}e^x|_0^{\infty}=\lim_{R\to\infty}(e^R-e^0)=\infty$$

ולכן האינטגרל לא מתכנס

ג.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\sin x^2\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{\infty}x\sin x^2\mathrm{d}x+\int\limits_{-\infty}^{0}x\sin x^2\mathrm{d}x$$

נתחיל בלבדוק את $\int\limits_0^\infty x\sin x^2 \mathrm{d}x$ נבצע הצבה $t=x^2$ ואז $\mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x$ ונקבל

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty x\sin x^2\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \sin t\mathrm{d}t = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2}\int\limits_0^R \sin t\mathrm{d}t\\ &= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2}\left.(-\cos t)\right|_0^R = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2}(-\cos R+1)\end{aligned}$$

הגבול לא קיים ולכן $\int\limits_0^\infty x\sin x^2\mathrm{d}x$ מתבדר, וזה מספיק כדי לקבוע ש $\int\limits_{-\infty}^\infty x\sin x^2\mathrm{d}x$ מתבדר.

ד. נתחיל בלמצוא פונקציה קדומה של $e^{-x}\sin x$. נשתמש באינטגרציה בחלקים ונקבל

$$\int e^{-x}\sin x\mathrm{d}x = -e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\cos x\mathrm{d}x = -e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\sin x\mathrm{d}x$$

ולכן

$$\int e^{-x}\sin x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)$$

ולכן

$$\begin{aligned}\int\limits_{-1}^\infty e^{-x}\sin x\mathrm{d}x &= \lim_{R\to\infty}\int\limits_{-1}^R e^{-x}\sin x\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \left.-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)\right|_{-1}^R\\ &= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2}e^1(\sin -1+\cos -1) - \frac{1}{2}e^{-R}(\sin R+\cos R)\\ &= \frac{1}{2}e(\cos 1 - \sin 1)\end{aligned}$$